# 前　言

解析几何是大学数学系的主要基础课程之一，学好这门课对于学习数学分析、高等代数、微分几何和力学等课程都有很大的帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题也是很有用的。

本书是以作者近几年在北京大学数学系讲授解析几何课程的讲稿为基础编写成的。编写中主要考虑了以下几点：

1．贯穿全书的主线是阐述解析几何的几种基本方法：坐标法，向量法，坐标变换法，点变换法。第一、二、三章主要讲坐标法和向量法，并且用这些方法讨论了空间中的平面和直线，以及常见曲面。第四、五章主要讲坐标变换法，并且用这方法讨论了二次曲线方程的化简。第六、七章主要讲点变换法，讲了三种变换：正交变换、仿射变换和射影变换；讲了如何用点变换法研究图形的性质；并且运用这些变换分别讨论了二次曲线的正交分类、仿射分类和射影分类。

2．本书主要讲欧氏几何和仿射几何，同时射影几何的内容也占了一定的篇幅。本书在讲射影几何的内容时，紧紧抓住几何背景(主要是抓住“中心投影”和“把”)，从而使读者易于理解射影平面、齐次坐标、交比、射影坐标和射影映射等概念。

3．本书注意培养读者对空间图形的直观想象能力，这尤其体现在第三章中关于旋转面、柱面和锥面方程的建立，以及专门用一节介绍了画空间图形常用的三种方法，画曲面的交线和画曲面围成的区域的方法。

4．本书论证严谨，同时又力求简明。叙述上深入浅出，条理清楚，注意讲清所讨论问题的来龙去脉。

5．本书在第四章§2结合坐标变换引进了矩阵的概念，讲

了矩阵的运算以及可逆矩阵、正交矩阵等内容。这样从第四章§3开始，本书就运用了矩阵的工具，从而使很多叙述和证明变得比较简单。

6. 本书仔细注意了习题的选择和配置。每一节后面都配了习题，有些习题是为了熟练掌握正文内容的，有些习题是富有启发性的，有的习题是对正文内容的补充。加“*”号的题较难一些。

本书可供综合大学和高等师范院校的数学系、力学系作为解析几何教材。如果周学时为4+2(即每周4学时讲课，2学时习题课)，则一学期可讲完全书(加“*”号内容可略去)。如果周学时为3+1，则可略去加“*”号内容以及第六章§6和第七章。

作者衷心感谢姜伯驹教授，他仔细审阅了本书初稿，提出了许多宝贵的修改意见，尤其是第七章，在他的指导下，作者对这一章的初稿作了修改，使得该章的质量有了很大提高。

作者感谢章学诚副教授和尤承业副教授，他们曾经对本书初稿的提纲提出了宝贵意见。作者还要感谢吴光磊教授、丁石孙教授、程庆民教授、田畴教授以及北京大学数学系几何代数教研室的同志们给予的支持和帮助。

由于作者水平的限制，书中缺点错误在所难免，诚恳地希望大家批评指正。

丘 维 声

1986年4月于北京大学

# 目　录

# 第一章 向量代数

解析几何最基本的方法是坐标法，即，建立一个坐标系，使得点用有序实数组(称为它的坐标)表示，从而图形可以用方程表示，通过方程来研究图形的性质。坐标法的优越性在于它利用了数可以进行运算的优点。那末，能否把代数运算直接引到几何中来？即什么样的几何对象能够做运算？我们从力学中知道，力、速度这些量既有大小、又有方向，它们可以用有向线段来表示，力(或速度)的合成可以通过有向线段来进行。这类既有大小、又有方向的量称为向量(或矢量)，本章要研究向量的代数运算。利用向量的运算来研究图形性质的方法称为向量法，它的优点在于比较直观，并且它在力学、物理学中也有重要的应用。在解析几何中，常常把向量法和坐标法结合起来使用。

## §1 向量及其线性运算

### 1.1 向量的概念

既有大小、又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。向量用符号$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…，或$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，…表示。

一个向量$\boldsymbol{a}$可以用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示，用这条线段的长度$|AB|$表示$\boldsymbol{a}$的大小，用起点$A$到终点$B$的指向表示$\boldsymbol{a}$的方向(如图1.1)。




图 1.1

规定长度相等并且方向相同的有向线段表示同一个向量。例如，若$\overrightarrow{AB}$表示向量$\boldsymbol{a}$，则$\overrightarrow{AB}$经过平行移动得到的有向线

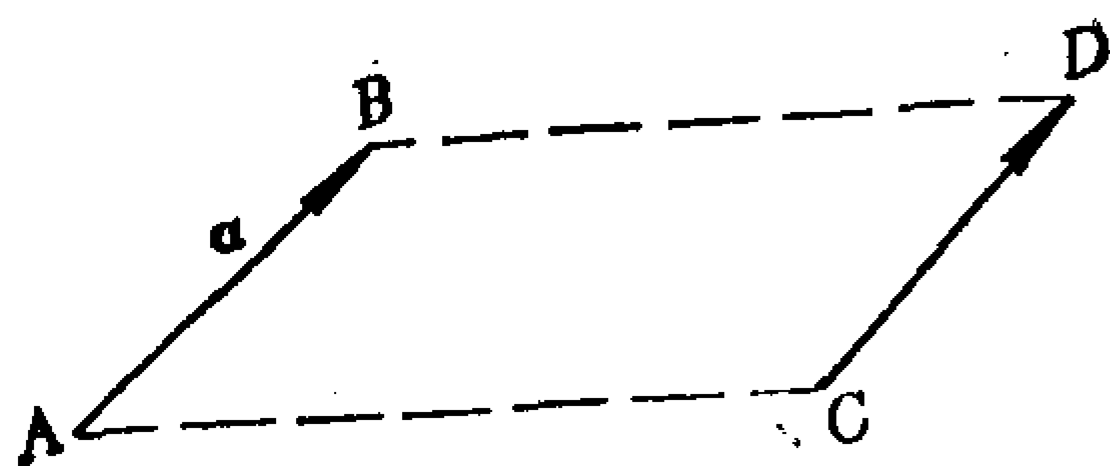


图 1.2

段 $\overrightarrow{CD}$ 仍然表示向量 $\boldsymbol{a}$（如图1.2）。我们记作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。

我们今后把向量的大小也称为向量的**长度**。向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$。

长度为零的向量称为**零向量**，记作0。零向量的方向不确定。

长度为 1 的向量称为**单位向量**。与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$。

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等并且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$。例如 $\overrightarrow{BA}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的反向量，因此 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$。

## 1.2 向量的加法

我们知道，接连作两次位移 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的效果是作了位移 $\overrightarrow{AC}$（如图1.3）。由这个实际背景我们作出

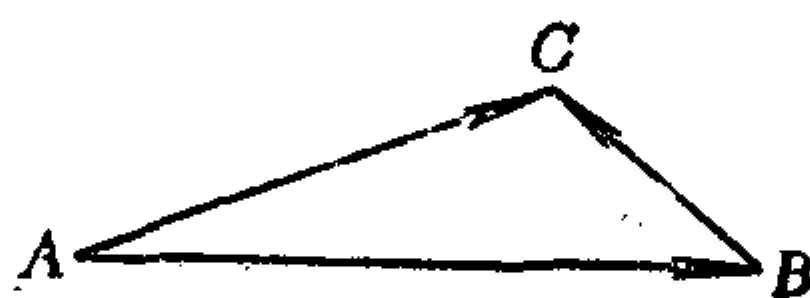


图 1.3

**定义1.1** 对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\boldsymbol{b}$，把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图1.4）。

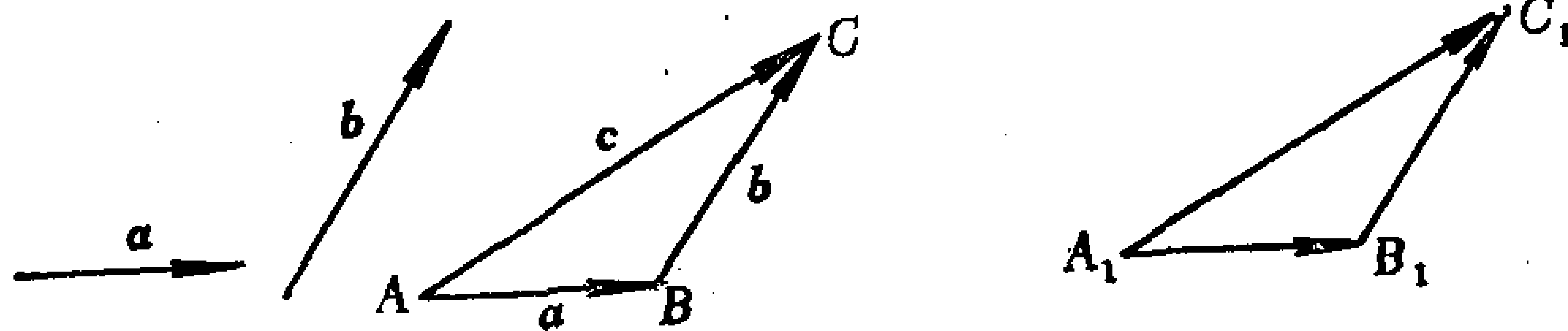


图 1.4

**注1** 若另取一个起点 $A_1$，作 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{B_1C_1}$ 表示 $\boldsymbol{b}$，则容易说明 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 表示同一个向量（如图1.4）。因此向量的加法与起点的选择无关。

**注2** 也可以从同一起点 $O$ 作 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$，再作平行四边形 $OACB$，则容易说明 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\boldsymbol{c}$（如图1.5）。




图 1.5

向量的加法适合下述规律：

(1) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是任意向量；

(2) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是任意向量；

(3) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$。

(1) **的证明** 作 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\boldsymbol{c}$ (如图1.6)，则 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；又 $\overrightarrow{AC}$ 表示 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，因此有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

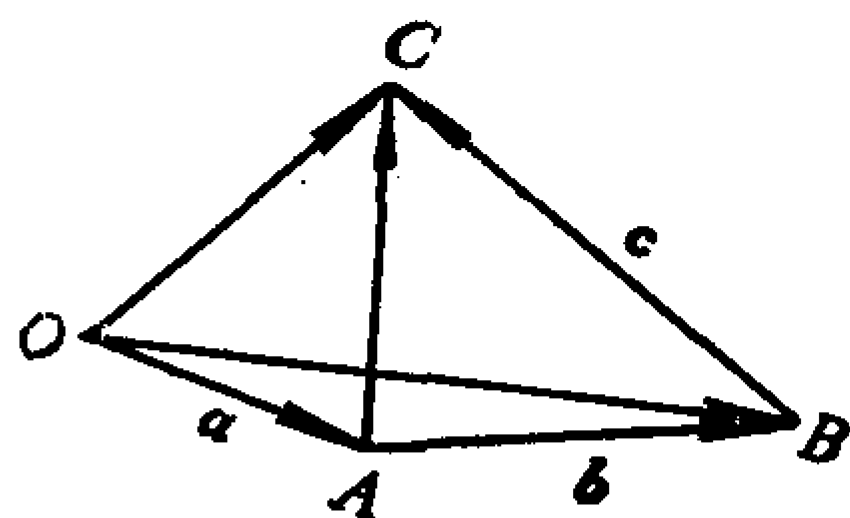



图 1.6

其余规律类似可证得。

本书中用符号“$A:=B$”表示用 $B$ 来规定 $A$，读作“$A$ 定义成 $B$”。

向量的减法的定义为：

**定义1.2** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别用同一起点的有向线段 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 表示，则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}.$$

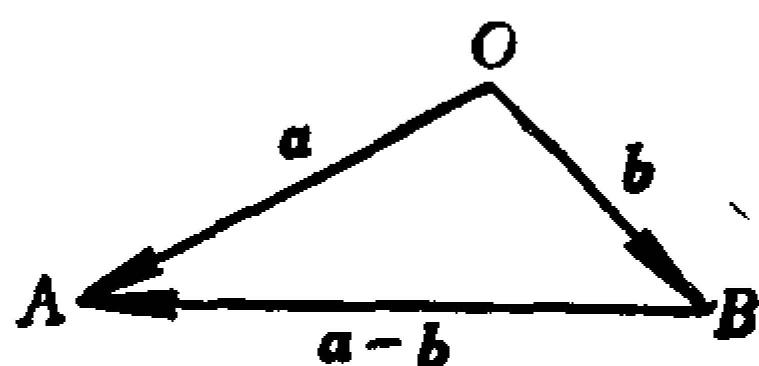


图 1.7

容易看出，对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，都有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

这个不等式称为**三角形不等式**，它是用向量的形式表示：三角形的一边不大于另两边的和。

## 1.3 向量的数量乘法

**定义1.3** 实数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的长度为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|:=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$时与 $\boldsymbol{a}$ 相反。

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，由于$|0\boldsymbol{a}|=0|\boldsymbol{a}|=0$，所以$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$。同理，对一切实数 $\lambda$ 都有 $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$。

设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，因为$|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，并且

$$||\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^{-1}|\boldsymbol{a}|=1,$$

所以 $\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$。把一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的长度的倒数，便得到一个与它同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，这称为把 $\boldsymbol{a}$ 单位化。

向量的数量乘法适合下述规律：对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意实数 $\lambda,\mu$ 有

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； (1.1)

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。 (1.2)

关于(1)和(2)可以用定义1.3直接验证。

**(3)的证明** 若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$或者 $\lambda,\mu$ 中有一个为零时，则等式(1.1)显然成立。下面设 $\lambda,\mu$ 都不等于零，并且 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$。

*情形1.* 若 $\lambda,\mu$ 同号，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\mu\boldsymbol{a}$ 方向相同，因此有

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|$$

$$=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

又有

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

因而

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|,$$

并且当 $\lambda,\mu$ 同号时，显然 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 与$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 同向，所以

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

*情形*2. 若 $\lambda,\mu$ 异号，由于 $\lambda$ 和 $\mu$ 的地位是对称的，因此不妨设 $\lambda>0,\mu<0$。又分以下三种情形：

2.1) 若 $\lambda+\mu=0$，则等式(1.1)的左边为$0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，右边为

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+(-1)(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda\boldsymbol{a})=\mathbf{0},$$

因此(1.1)式成立。

2.2) 若 $\lambda+\mu>0$，因为 $\lambda+\mu>0$，$-\mu>0$，于是由情形 1知

$$[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a},$$

即得

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu\boldsymbol{a}),$$

从而有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

2.3) 若 $\lambda+\mu<0$，因为 $\lambda+\mu$ 与 $-\lambda$ 同号，于是由情形 1 知

$$[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}.$$

类似于2.2)可得(1.1)式。

**(4)的证明** 若 $\lambda=0$或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\mathbf{0}$，则(1.2)式显然成立。下面设 $\lambda\neq 0,\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$。

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，则存在实数 $\mu$ 使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(1\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]\\&=[\lambda(1+\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\lambda\mu)\boldsymbol{a}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda(\mu\boldsymbol{a})\\&=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

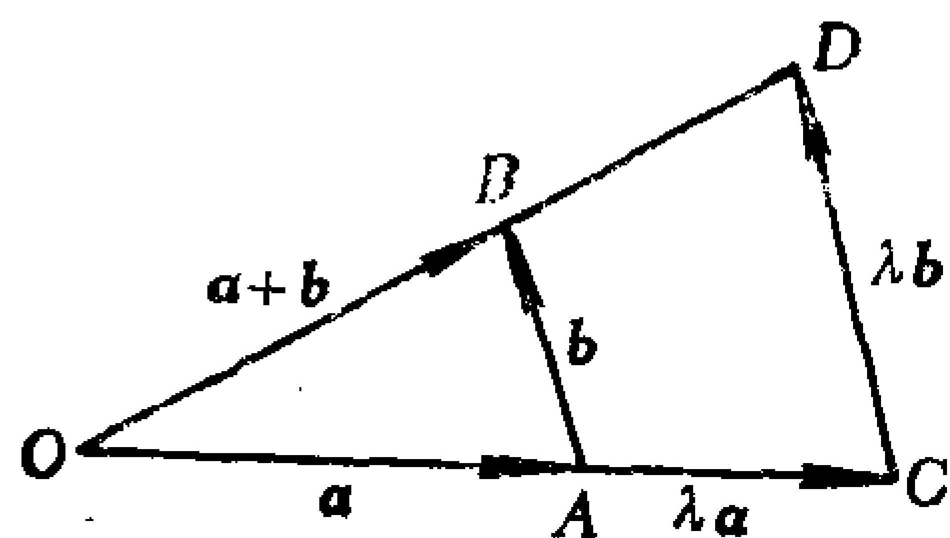



图 1.8

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行，那末当 $\lambda>0$ 时，作 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，于是 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；作 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{CD}$ 分别表示 $\lambda\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}$（如图1.8）。则 $\triangle OAB\backsim\triangle OCD$，从而 $D$ 必在直线 $OB$ 上，于是 $\overrightarrow{OD}$ 表示 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；又 $\overrightarrow{OD}$ 表示 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，所以有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda<0$ 时可以作类似讨论。

## 1.4 共线（共面）的向量组

向量的加法和数量乘法统称为向量的线性运算。

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是一组实数，则 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 是一个向量，称它是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**，称 $k_1,\cdots,k_n$ 是这个组合的**系数**。

**定义1.4** 向量组若用同一起点的有向线段表示后，它们在一条直线（一个平面）上，则称这个向量组是**共线的（共面的）**。

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$。

显然 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量共线；共线的向量组一定共面；两个向量一定共面；若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（或者 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$），则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线。

**命题1.1** 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，并且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则存在唯一的实数 $\lambda$ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

**证明** 存在性。若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{b}^0=\boldsymbol{a}^0$，从而有

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^0=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{b}|(|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a})=(|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1})\boldsymbol{a},$$

取 $\lambda=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1}$，即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，可以类似讨论。

唯一性。假如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$。

**命题1.2** $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实

数 $\lambda,\mu$，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0。\tag{1.3}$$

**证明** 必要性。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=0$，则有 $1\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{b}=0$。

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不全为0，不妨设 $\boldsymbol{a}\neq0$，则存在实数 $\lambda$ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，从而有

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=0。$$

充分性。若有不全为零的实数 $\lambda,\mu$ 使得(1.3)式成立，不妨设 $\lambda\neq0$，则由(1.3)式得 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$，因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线。

**推论1.1** $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线的充分必要条件是：从(1.3)式成立可以推出 $\lambda=\mu=0$。

**命题1.3** 若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面。

**证明** 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共线，从而它们共面。若 $\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{b}$，则当 $\lambda>0$，$\mu>0$ 时，由图1.9知，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面。对 $\lambda,\mu$ 的其他取值情况，可以类似讨论。

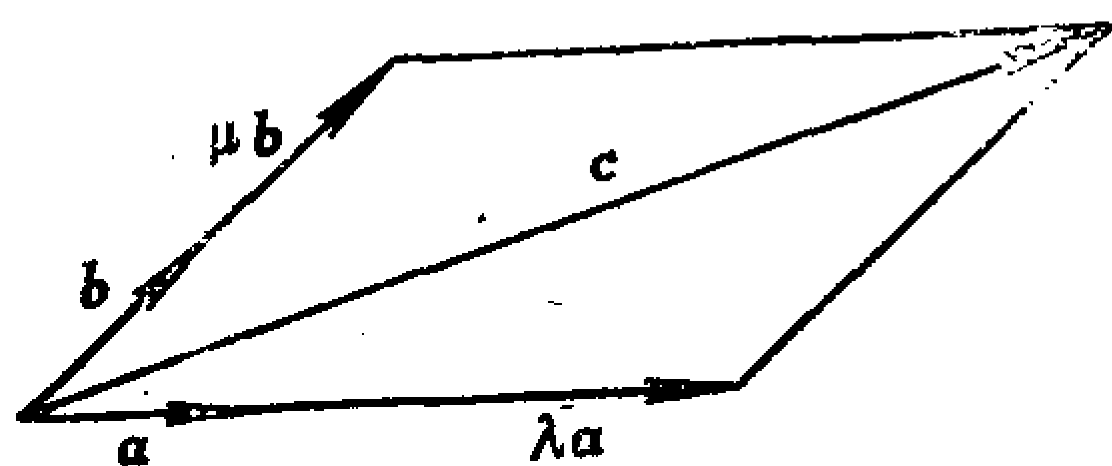


图 1.9

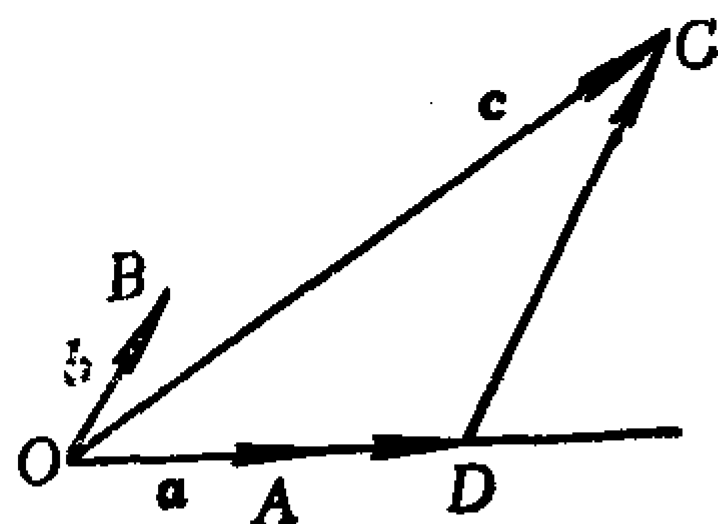


图 1.10

**命题1.4** 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，并且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则存在唯一的一对实数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}。$$

**证明** 存在性。从同一起点 $O$ 作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}。$$

过 $C$ 作 $CD\parallel OB$，且与直线 $OA$ 交于 $D$。因为 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以有实数 $\lambda$ 使得 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}$。同理有 $\overrightarrow{DC}=\mu\boldsymbol{b}$。因此有

$$c = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \lambda a + \mu b.$$

唯一性。假如 $c = \lambda a + \mu b = \lambda_1 a + \mu_1 b$，则有

$$(\lambda - \lambda_1)a + (\mu - \mu_1)b = 0,$$

因为 $a$ 与 $b$ 不共线，根据推论1.1即得

$$\lambda - \lambda_1 = 0, \quad \mu - \mu_1 = 0,$$

于是 $\lambda = \lambda_1$，$\mu = \mu_1$。

**命题1.5** $a, b, c$ 共面的充分必要条件是有不全为零的实数 $k_1, k_2, k_3$ 使得

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0. \tag{1.4}$$

**证明** 必要性。设 $a, b, c$ 共面，若 $a \not\parallel b$，则有实数 $\lambda, \mu$ 使得 $c = \lambda a + \mu b$。即

$$\lambda a + \mu b + (-1)c = 0.$$

若 $a \parallel b$，则有不全为零的实数 $\lambda, \mu$ 使得 $\lambda a + \mu b = 0$，从而有

$$\lambda a + \mu b + 0c = 0.$$

充分性。不妨设 $k_1 \neq 0$，则由(1.4)式得

$$a = -\frac{k_2}{k_1} b - \frac{k_3}{k_1} c,$$

因此 $a, b, c$ 共面。

**推论1.2** $a, b, c$ 不共面的充分必要条件是：从(1.4)式成立可以推出 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。

由于上述这些命题，使得向量的线性运算可以用来解决有关点的共线或共面问题，直线的共点问题以及线段的定比分割问题；并且这些命题是建立向量的坐标的依据。

**例1.1** 试证：点 $M$ 在线段 $AB$ 上的充分必要条件是：存在非负实数 $\lambda, \mu$ 使得

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, \text{ 且 } \lambda + \mu = 1,$$

其中 $O$ 是任意取定的一点。

**证明** 必要性。设 $M$ 在线段 $AB$ 上，则 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向，并

且$0 \leqslant |\overrightarrow{AM}| \leqslant |\overrightarrow{AB}|$，所以

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB},\quad 0 \leqslant k \leqslant 1.$$

任取一点$O$，由上式得$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$，即

$$\overrightarrow{OM} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB},$$

取$\lambda = 1-k$，$\mu = k$，则$\lambda + \mu = 1$，并且$\lambda \geqslant 0$，$\mu \geqslant 0$。

充分性．若对某一点$O$有非负实数$\lambda, \mu$使得

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB},\quad 且\ \lambda + \mu = 1,$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}) - (\lambda + \mu)\overrightarrow{OA} \\ &= \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \mu\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

于是$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AB}$共线，所以$M$在直线$AB$上．由于$0 \leqslant \mu \leqslant 1$，所以$M$在线段$AB$上。

**例1.2** 试证：三点$A, B, C$共线的充分必要条件是：存在不全为零的实数$\lambda, \mu, \nu$，使得

$$\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC} = 0,\quad 并且\ \lambda + \mu + \nu = 0,$$

其中$O$是任意取定的一点。

**证明** 必要性．若$A, B, C$共线，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线，于是存在不全为零的实数$k, l$使得

$$k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} = 0.$$

任取一点$O$，由上式得

$$k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0,$$

即

$$-(k+l)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC} = 0.$$

取$\lambda = -(k+l)$，$\mu = k$，$\nu = l$，则得

$$\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC} = 0,\quad 且\ \lambda + \mu + \nu = 0.$$

充分性．若对某一点$O$，有不全为零的实数$\lambda, \mu, \nu$使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}，且\ \lambda+\mu+\nu=0,$$

则 $\lambda=-(\mu+\nu)$，于是

$$-(\mu+\nu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\mathbf{0},$$

即
$$\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\nu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\mathbf{0},$$

也就是 $\mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$。易说明 $\mu,\nu$ 不全为零，从而得 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，所以 $A,B,C$ 共线。

## 习　题　1.1

1．已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为 $AC$ 和 $BD$，设 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{DA}$。

2．已知平行四边形 $ABCD$ 的边 $BC$ 和 $CD$ 的中点分别为 $K$ 和 $L$，设 $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$，求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$。

3．证明：$M$ 是线段 $AB$ 的中点的充分必要条件是：对任意一点 $O$ 有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$。

4．设 $M$ 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点，证明：对任意一点 $O$，有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$。

5．设 $AD,DE,CF$ 是 $\triangle ABC$ 的三条中线，用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$，并且求 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$。

6．设 $A,B,C,D$ 是一个四面体的顶点，$M,N$ 分别是边 $AB$，$CD$ 的中点，证明 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$。

7．证明：对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

这个不等式称为**三角形不等式**。等号成立的充分必要条件是什么？

8. 证明：若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，则其中至少有一个向量可以表示成其余两个向量的线性组合。是否其中每一个向量都可以表示成其余两个向量的线性组合？

9. 证明：点$M$在直线 $AB$ 上的充分必要条件是：有实数$\lambda$，$\mu$ 使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}，\text{并且 } \lambda+\mu=1,$$

其中$O$是任意取定的一点。

10. 证明：四点 $A,B,C,D$ 共面的充分必要条件是：存在不全为零的实数 $\lambda,\mu,\nu,\omega$ 使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}=0，\text{且 } \lambda+\mu+\nu+\omega=0,$$

其中$O$是任意取定的一点。

11. 设 $A,B,C$ 是不在一直线上的三点，则点$M$在 $A,B,C$ 决定的平面上的充分必要条件是：存在实数 $\lambda,\mu,\nu$ 使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}，\text{且 } \lambda+\mu+\nu=1,$$

其中$O$是任意取定的一点。

12. 证明：点$M$在$\triangle ABC$ 内(包括三条边)的充分必要条件是：存在非负实数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}，\text{且 } \lambda+\mu\leqslant 1.$$

13. 证明：点$M$在$\triangle ABC$ 内(包括三边)的充分必要条件是：存在非负实数 $\lambda,\mu,\nu$ 使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}，\text{且 } \lambda+\mu+\nu=1,$$

其中$O$是任意取定的一点。

14. 用向量法证明：平行四边形的对角线互相平分。

15. 用向量法证明：三角形 $ABC$ 的三条中线相交于一点$M$，并且对任意一点$O$有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

16. 用向量法证明：四面体 $ABCD$ 的对棱中点连线交于一

点$M$，并且对于任意一点$O$有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

17．在$\triangle ABC$中，$E,F$分别是$AC,AB$上的点，并且$CE=\frac{1}{3}CA$，$AF=\frac{1}{3}AB$，设$BE$与$CF$交于$G$，证明

$$GE=\frac{1}{7}BE,\quad GF=\frac{4}{7}CF.$$

*18． 用向量法证明**契维定理**：若三角形$ABC$的三边$AB$，$BC$，$CA$依次被分割成

$$AF:FB=\lambda:\mu,\quad BD:DC=\nu:\lambda,\quad CE:EA=\mu:\nu,$$

其中$\lambda,\mu,\nu$均为正实数，则三角形$ABC$的顶点与对边分点的连线交于一点$M$，并且对于任意一点$O$有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\lambda+\mu+\nu}(\mu\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}).$$

*19． 用向量法证明：三角形$ABC$的三条角平分线交于一点$N$。并且对于任意一点$O$有

$$\overrightarrow{ON}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

其中$a,b,c$分别是$A,B,C$所对的边的边长。

*20． 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是正$n$边形的顶点，$O$是它的对称中心。证明$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=0$。

*21． 设一个区域$G$，如果连结它的任意两点的线段上的每一点都是$G$的点，则称$G$是**凸的**。证明：由同一点出发的向量

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

的终点组成的区域是凸的，其中$k_1,\cdots,k_m$都是非负实数，并且$k_1+\cdots+k_m=1$。

## §2　仿射坐标系和直角坐标系

向量法的优点在于比较直观，但是向量的运算不如数的运算简洁，为了取长补短，我们给向量引进它的坐标，同时给点也引进它的坐标，把向量法与坐标法结合起来使用。

### 2.1　向量和点的仿射坐标、直角坐标

**定理1.1**　空间中任意给定三个不共面的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，则任意一个向量 $\boldsymbol{m}$ 可以唯一表示成 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性组合。

**证明**　可表性。取一点 $O$，作 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OM}$ 分别表示 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{m}$。过 $M$ 作一直线与 $OA_3$ 平行，且与 $OA_1$ 和 $OA_2$ 决定的平面交于 $N$。过 $N$ 作一直线与 $OA_2$ 平行，并且与 $OA_1$ 交于 $P$。因为

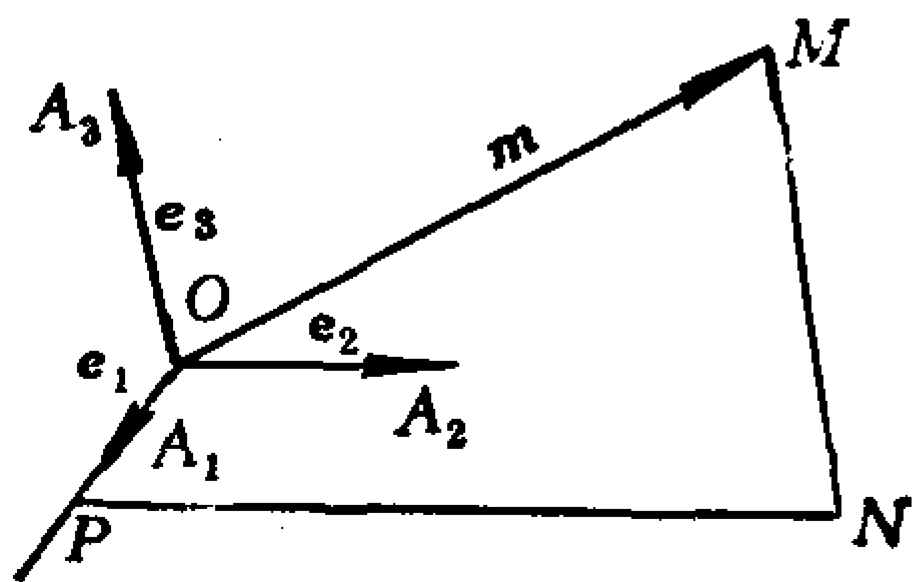



图　1.11

$$\overrightarrow{OP} \parallel \boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{PN} \parallel \boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{NM} \parallel \boldsymbol{e}_3,$$

所以分别存在实数 $x, y, z$ 使得

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{PN} = y\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{NM} = z\boldsymbol{e}_3.$$

从而

$$\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3.$$

唯一性。若

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3,$$

则得

$$(x - x_1)\boldsymbol{e}_1 + (y - y_1)\boldsymbol{e}_2 + (z - z_1)\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不共面，所以

$$x - x_1 = y - y_1 = z - z_1 = 0,$$

即

$$x = x_1,\quad y = y_1,\quad z = z_1.$$

**定义1.5** 空间中任意三个有次序的不共面的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为空间中的一组**基**。对于空间中任一向量 $\boldsymbol{m}$，若

$$\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

则把有序三元实数组$(x,y,z)$称为 $\boldsymbol{m}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 中的**坐标**。

向量有了坐标后，我们再对空间中的点也引进坐标。由于空间中取定一个点$O$以后，任意一个点$M$与向量$\overrightarrow{OM}$互相唯一决定，因此我们把向量$\overrightarrow{OM}$称为点$M$的**定位向量**(或**矢径**)。

**定义1.6** 空间中一个点$O$和一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 合在一起称为空间的一个**仿射标架**或**仿射坐标系**，记作$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，其中$O$称为**原点**。对于空间中任意一点$M$，把它的定位向量$\overrightarrow{OM}$在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 中的坐标称为点$M$在仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的**坐标**。

由定义1.6知，点$M$在$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的坐标为$(x,y,z)$的充分必要条件是：

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

以后我们把向量 $\boldsymbol{m}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 中的坐标也称为 $\boldsymbol{m}$ 在仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的坐标。

空间中取定了一个仿射标架后，由定理1.1知，空间中全体向量的集合与全体有序三元实数组的集合之间就建立了一一对应；通过定位向量，空间中全体点的集合与全体有序三元实数组的集合之间也建立了一一对应。

设$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$为空间的一个仿射标架，过原点$O$，且分别以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为方向的有向直线分别称为$x$轴，$y$轴，$z$轴，统称为**坐标轴**。由每两根坐标轴决定的平面称为**坐标平面**，它们分别为$xOy$，$yOz$，$zOx$平面。坐标平面把空间分成八个部分，称为八个**卦限**（如图1.12），在每个卦限内，点的坐标的符号是不变的。

将右手的拇指和食指分别指着$x$轴和$y$轴的方向，如果中指所指的方向与$z$轴方向在$xOy$平面同侧，则称此坐标系为**右手系**，否则称为**左手系**(如图1.13)。

| 卦限<br>坐标 | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − | + | + | − | − |
| $z$ | + | + | + | + | − | − | − | − |

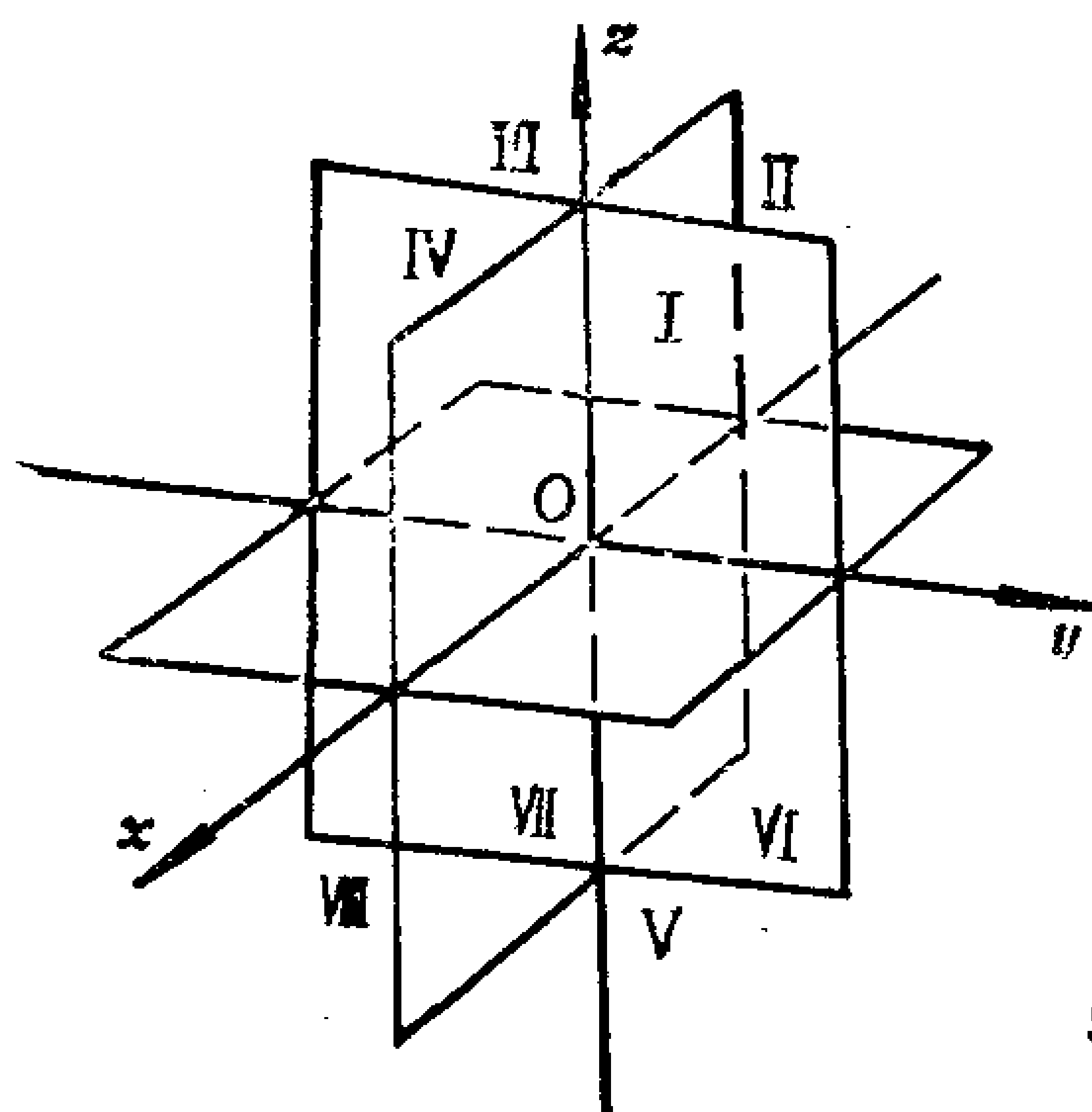
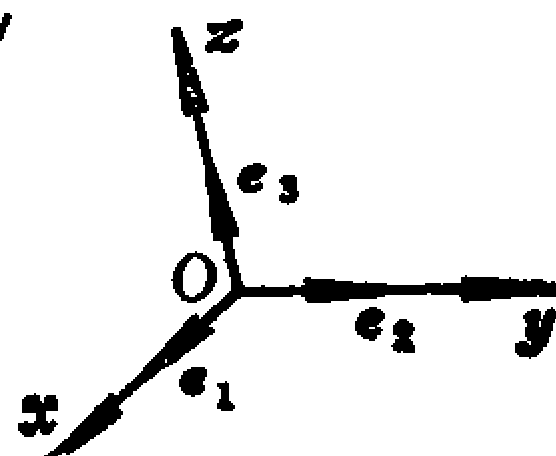
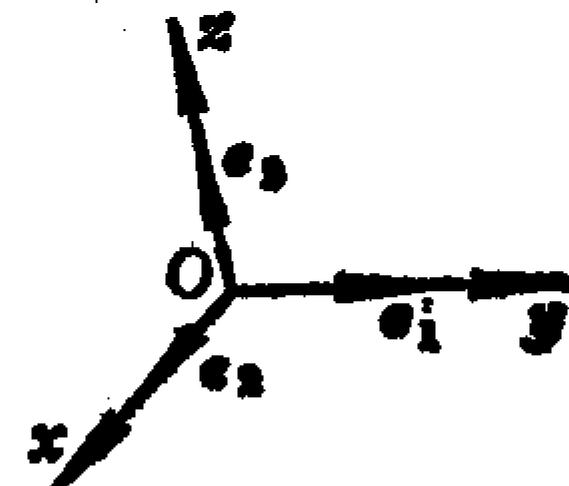



图 1.12




右手系




左手系

图 1.13

**定义1.7** 如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直，并且它们都是单位向量，则$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$称为一个**直角标架**或**直角坐标系**。

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 两两垂直，则它们一定不共面，因此直角标架是特殊的仿射标架。

点(或向量)在直角坐标系中的坐标称为它的**直角坐标**，在仿射坐标系中的坐标称为它的**仿射坐标**。

类似地可讨论平面上的仿射坐标系和直角坐标系。

## 2.2 用坐标作向量的线性运算

取定仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，设$\boldsymbol{a}$的坐标是$(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}$的

坐标是$(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)+(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)$$
$$=(a_1+b_1)\boldsymbol{e}_1+(a_2+b_2)\boldsymbol{e}_2+(a_3+b_3)\boldsymbol{e}_3,$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标是$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$。这说明：向量和的坐标等于对应坐标的和。

对于任意实数 $\lambda$，有

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)=(\lambda a_1)\boldsymbol{e}_1+(\lambda a_2)\boldsymbol{e}_2+(\lambda a_3)\boldsymbol{e}_3,$$

所以 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标是$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$。这说明：$\boldsymbol{a}$ 乘以实数 $\lambda$，则它的坐标就都乘上同一个实数 $\lambda$。

由上述得：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标是$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$。

**定理1.2** 向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标。

**证明** 对于向量 $\overrightarrow{AB}$，设 $A,B$ 的坐标分别是$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$，它们也分别是 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 的坐标。因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标是$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$。

点$M$的坐标是它的定位向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标；向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标，这两句话表明了点的坐标与向量的坐标之间的关系。

## 2.3 三点(或两向量)共线的条件

**定理1.3** 在三个点 $A,B,C$ 所在的平面上取一个仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，设 $A,B,C$ 的坐标分别是

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3),$$

则三点 $A,B,C$ 共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1.5}$$

**证明** 必要性。设三点 $A,B,C$ 共线，则由例1.2知，存在不全为零的实数 $\lambda,\mu,\nu$ 使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\mathbf{0},\ \text{且}\ \lambda+\mu+\nu=0. \tag{1.6}$$

(1.6)中向量的等式用坐标写出就是

$$\begin{cases}\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3=0,\\ \lambda y_1+\mu y_2+\nu y_3=0.\end{cases} \tag{1.7}$$

用 $\nu=-(\lambda+\mu)$ 代入(1.7)式得

$$\begin{cases}\lambda(x_1-x_3)+\mu(x_2-x_3)=0,\\ \lambda(y_1-y_3)+\mu(y_2-y_3)=0.\end{cases} \tag{1.8}$$

因为 $\lambda,\mu,\nu$ 不全为零，于是据(1.6)知，$\lambda,\mu$ 不全为零。从而未知量为 $x,y$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}(x_1-x_3)x+(x_2-x_3)y=0,\\ (y_1-y_3)x+(y_2-y_3)y=0\end{cases} \tag{1.9}$$

有非零解：$x=\lambda,y=\mu$。因此它的系数行列式

$$\begin{vmatrix}x_1-x_3 & x_2-x_3\\ y_1-y_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}=0. \tag{1.10}$$

于是有

$$\begin{vmatrix}x_1-x_3 & x_2-x_3 & x_3\\ y_1-y_3 & y_2-y_3 & y_3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

即得

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

充分性。如果(1.5)式成立，则(1.10)式成立。从而齐次线性方程组(1.9)有非零解：$x=\lambda,y=\mu$。于是得(1.8)式。令 $\nu=-(\lambda+\mu)$，则得(1.7)式，所以(1.6)成立。据例1.2知，$A,B,C$ 共线。

**定理1.4** 设两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在空间仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的坐标分别是$(a_1,a_2,a_3)$，$(b_1,b_2,b_3)$。则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条

件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.11)$$

**证明** 必要性。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线。假如 $\boldsymbol{a}=0$，则(1.11) 显然成立。下设 $\boldsymbol{a}\neq 0$，于是有实数 $k$ 使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，所以

$$b_i = ka_i, \quad i=1,2,3.$$

从而

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0.$$

同理，(1.11)中的其余两个行列式也为零。

充分性。设(1.11)式成立。如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$，则结论显然成立。下设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$。于是不妨设 $a_1\neq 0$，$b_2\neq 0$(其余情况可类似讨论)。因为

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

所以 $a_1b_2=a_2b_1$。从而有

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}.$$

把这个比值记作 $k$，则得 $b_1=ka_1$，$b_2=ka_2$。因为

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - a_3b_1 = a_1(b_3-ka_3),$$

所以 $b_3=ka_3$。于是有

$$(b_1,b_2,b_3)=(ka_1,ka_2,ka_3),$$

从而得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线。

## 2.4 线段的定比分点

对于线段 $AB(A\neq B)$，如果点 $C$ 满足 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，则称**点 $C$ 分线段 $AB$ 成定比 $\lambda$**。当 $\lambda>0$ 时，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向，点 $C$ 是线段

$AB$内部的点，称$C$为**内分点**；当$\lambda<0$时，$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{CB}$反向，$C$是线段$AB$外部的点，称$C$为**外分点**；$\lambda=0$时，$C$点与$A$点重合；假如$\lambda=-1$，则得$\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}$，即$\overrightarrow{AB}=0$，矛盾，所以$\lambda\neq-1$。

**命题1.6** 设$A$，$B$的坐标分别是$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$，则分线段$AB$成定比$\lambda(\lambda\neq-1)$的分点$C$的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{1.12}$$

**证明** 设$C$点的坐标是$(x,y,z)$。$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，用坐标写出就是

$$\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x),\\ y-y_1=\lambda(y_2-y),\\ z-z_1=\lambda(z_2-z).\end{cases}$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

**推论1.3** 设$A$，$B$的坐标分别为$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$，则线段$AB$的中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

**例1.3** 用坐标法证明：四面体对棱中点的连线交于一点。

**证明** 设四面体$ABCD$的棱$AB$，$AC$，$AD$，$BC$，$CD$，$DB$的中点分别是$B'$，$C'$，$D'$，$E$，$F$，$G$。

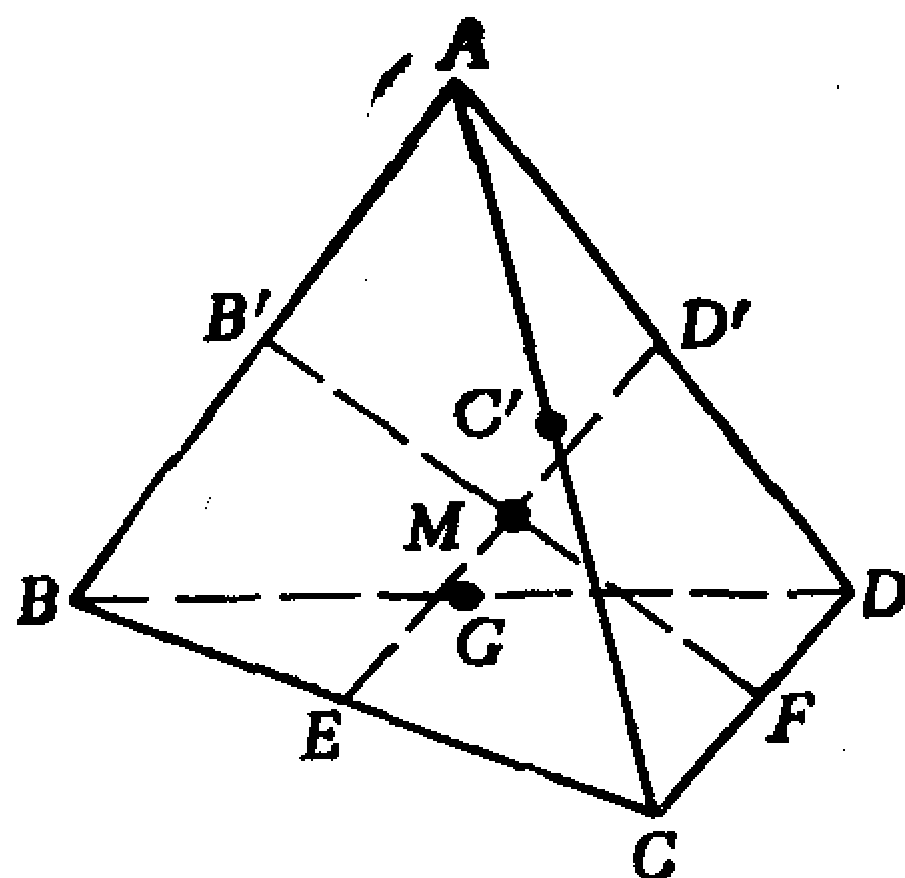


图 1.14

取仿射标架$[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]$，则各点坐标分别为：$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,1)$，$B'\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$C'\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，

$D'\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $G\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

设 $B'F$ 与 $D'E$ 交于点 $M(x,y,z)$，设 $\overrightarrow{B'M}=k\overrightarrow{MF}$，$\overrightarrow{D'M}=l\overrightarrow{ME}$，则$M$的坐标为：

$$x=\frac{\frac{1}{2}+k\cdot 0}{1+k}=\frac{0+l\cdot\frac{1}{2}}{1+l},\quad y=\frac{0+k\frac{1}{2}}{1+k}=\frac{0+l\frac{1}{2}}{1+l},$$

$$z=\frac{0+k\frac{1}{2}}{1+k}=\frac{\frac{1}{2}+l\cdot 0}{1+l},$$

解得 $l=1,k=1$。从而$M$的坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

设$B'F$与$C'G$交于$M'$，同理可求得$M'$坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，所以$M$与$M'$重合，即$B'F,D'E,C'G$交于一点$M$。

**注** 此题在写出各点坐标后，也可以先求出$B'F$的中点坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，$D'E$的中点坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，$C'G$的中点坐标为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，这说明点$M\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$是$B'F,D'E,C'G$的公共点，从而得证。

在用坐标法解决问题时，一定要注意针对问题的特点选取合适的坐标系。

## 习 题 1.2

1． 在一个仿射坐标系中画出下列各点：

$P(1,3,4),Q(-1,1,3),M(-1,-2,-3)$.

2． 给定直角坐标系，设点$M$的坐标为$(x,y,z)$，求它分别

对于 $xOy$ 平面，$x$ 轴和原点的对称点的坐标。

3． 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于 $M$ 点，设

$$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}.$$

取仿射标架$[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]$，求点 $M,P,Q$ 的坐标以及向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标。

4． 对于平行四边形 $ABCD$，求 $A,D,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}$ 在仿射标架$[C;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}]$中的坐标。

5． 设 $ABCDEF$ 为正六边形，求各顶点以及向量 $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DF}$ 在$[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}]$中的坐标。

6． 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_3$是以原点 $O$ 为顶点的平行六面体的三条棱，求此平行六面体过点 $O$ 的对角线与平面 $ABC$ 的交点 $M$ 在仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$下的坐标。

7． 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别是$(1,5,2),(0,-3,4),(-2,3,-1)$，求下列向量的坐标：

1） $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；　　2） $-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$。

8． 已知平行四边形 $ABCD$ 中顶点 $A,B,C$ 的坐标分别为$(1,0,2),(0,3,-1),(2,-1,3)$，求 $D$ 点和对角线交点 $M$ 的坐标。

9． 判断下列各组的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面？能否将 $\boldsymbol{c}$ 表示成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合？若能表示，则写出表示式。

1） $\boldsymbol{a}(5,2,1),\boldsymbol{b}(-1,4,2),\boldsymbol{c}(-1,-1,5)$；

2） $\boldsymbol{a}(6,4,2),\boldsymbol{b}(-9,6,3),\boldsymbol{c}(-3,6,3)$；

3） $\boldsymbol{a}(1,2,-3),\boldsymbol{b}(-2,-4,6),\boldsymbol{c}(1,0,5)$。

10．设点 $C$ 分线段 $AB$ 成5:2，点 $A$ 的坐标为$(3,7,4)$，点 $C$ 的坐标为$(8,2,3)$，求点 $B$ 的坐标。

11．用坐标法证明：三角形 $ABC$ 的三条中线交于一点。若 $A,B,C$ 的坐标分别为$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$，$(x_3,y_3,z_3)$，求 $\triangle ABC$ 的重心的坐标。

12. 在$\triangle ABC$中，设$P,Q,R$分别是直线$AB,BC,CA$上的点，并且

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{QC},\ \overrightarrow{CR}=\nu\overrightarrow{RA}.$$

证明$P,Q,R$共线的充分必要条件是$\lambda\mu\nu=-1$。

## §3 向量的内积

有关长度、角度问题如何利用向量来解决？从力学中知道，若力$\boldsymbol{F}$使质点$A$位移$\boldsymbol{S}$，则$\boldsymbol{F}$做的功$W$为：

$$W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{S}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\alpha,$$

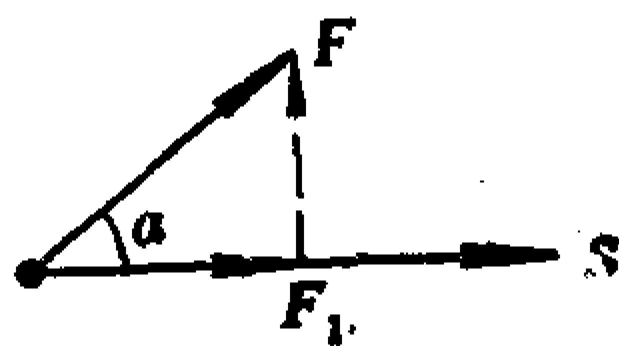



图 1.15

其中$\boldsymbol{F}_1$是$\boldsymbol{F}$沿$\boldsymbol{S}$方向的分力，$\alpha$是$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{S}$的夹角。在求功$W$的式子里出现了向量的长度，两向量的夹角，从这物理背景受到启发，为了解决有关长度、角度问题，需要考虑类似于功$W$那样的数量，它是由向量$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{S}$确定的。由于求功$W$的第一步是求分力$\boldsymbol{F}_1$，所以先来考虑类似于分力$\boldsymbol{F}_1$那样的向量。

### 3.1 射影和分量

给了向量$\boldsymbol{a}$和单位向量$\boldsymbol{e}$，显然$\boldsymbol{a}$可以分解成：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,$$

图 1.16

其中$\boldsymbol{a}_1\parallel\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{e}$。并且这样的分解法是唯一的，这是因为假如还有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\quad \boldsymbol{b}_1\parallel\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{b}_2\perp\boldsymbol{e},$$

则得$(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_2)=0$，即$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2$。因为容易说明

$$(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1)\parallel\boldsymbol{e},\quad(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2)\perp\boldsymbol{e},$$

所以
$$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2=0,$$

即
$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1,\quad \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2.$$

**定义1.8** 若向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，其中$\boldsymbol{a}_1\parallel\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}$是单位向

量，则称 $\boldsymbol{a}_1$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的**内射影**(简称射影)；称 $\boldsymbol{a}_2$ 是 $\boldsymbol{a}$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 下的**外射影**。

**定义1.9** 若 $\boldsymbol{a}_1$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$(单位向量)上的内射影，则存在唯一的实数 $\lambda$ 使得 $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{e}$，这个实数 $\lambda$ 被称为 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的**分量**，记作 $\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$。

约定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$(或记成 $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$)是指不大于 $\pi$ 的那个角，即，$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$。

**命题1.7** 向量 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$(单位向量)上的分量为：

$$\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle. \tag{1.13}$$

**证明** 用 $\lambda$ 表示 $\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{e}$，所以 $|\lambda|=|\boldsymbol{a}|$。由直角三角形的解法知，

$$|\boldsymbol{a}_1|=|\boldsymbol{a}|\,|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle|.$$

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$ 为锐(钝)角时，$\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同(反)向，从而 $\lambda>0(\lambda<0)$。因此

$$\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}=\lambda=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle.$$

**命题1.8** 设 $\boldsymbol{e}$ 为一个单位向量，则对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有

$$\prod_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}+\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{b}, \tag{1.14}$$

$$\prod_{\boldsymbol{e}}(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}). \tag{1.15}$$

**证明** 建立直角标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，由图1.17知，

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{PN}=y\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{NM}=z\boldsymbol{e}_3$。由三垂线定理知，$MP\perp OP$。所以 $\overrightarrow{OP}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的内射影，从而得 $\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}=x$。这说明 $\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的第一个直角坐标，

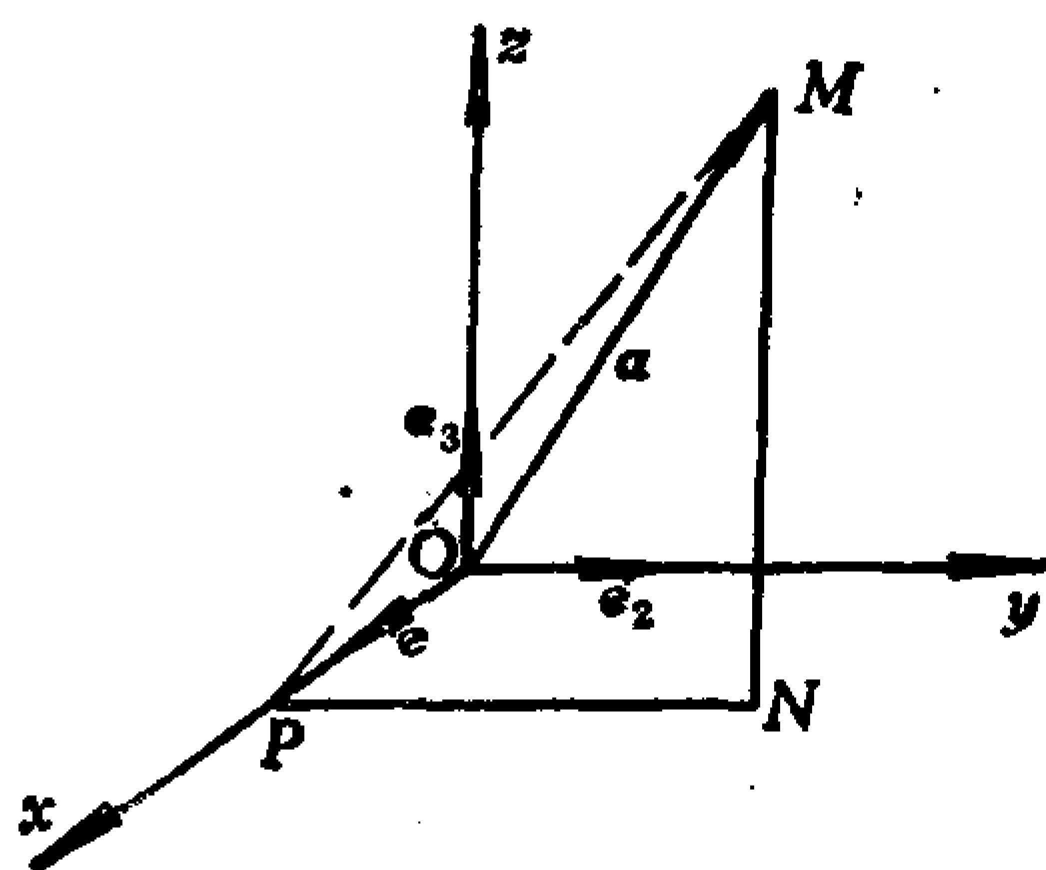


图 1.17

于是据“向量和的坐标等于对应坐标的和”便得到：

$$\prod_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}+\prod_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{b}.$$

类似可得

$$\prod_{e}(\lambda \boldsymbol{a})=\lambda(\prod_{e}\boldsymbol{a}).$$

## 3.2 向量的内积的定义和性质

类似于功那样的数量，我们引进向量的内积的概念。

**定义1.10** 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**(记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) 规定为一个实数：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle, \tag{1.16}$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为 0，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=0$。

若 $\boldsymbol{b}\neq 0$，则由(1.13)和(1.16)得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\prod_{b^0}\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}|. \tag{1.17}$$

(1.17)式表明了向量的内积与分量的关系。

由(1.16)式可得：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}, \tag{1.18}$$

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},\quad 当\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{b}\neq 0. \tag{1.19}$$

(1.18)和(1.19)表明可以利用向量的内积来解决有关长度和角度的问题。

由定义 1.10 可得到：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

**定理1.5** 对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，任意实数 $\lambda$，有

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (对称性)，

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (线性)，

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$ (线性)，

(4) 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}>0$ (正定性)。

**证明** 由定义(1.10)立即得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

由(1.17)，(1.15)和(1.14)得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\prod_{b^0}(\lambda\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}|=\lambda(\prod_{b^0}\boldsymbol{a})|\boldsymbol{b}|=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}&=\prod_{b^0}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})|\boldsymbol{b}|=(\prod_{b^0}\boldsymbol{a}+\prod_{b^0}\boldsymbol{c})|\boldsymbol{b}|\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

由定义1.10立即得到：若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2>0$。

由内积的对称性和线性还可得到：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

**例1.4** 证明三角形的三条高线交于一点.

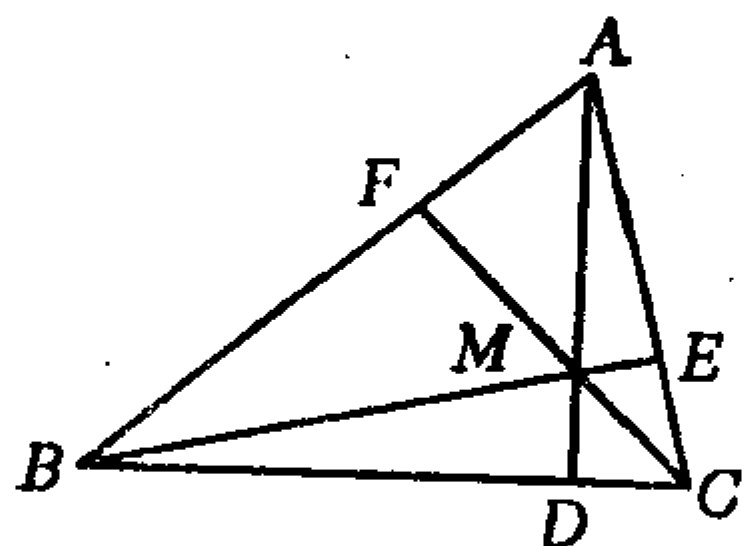



图 1.18

**证明** 设$\triangle ABC$的两条高线$BE,CF$交于$M$。连接$AM$。因为$BE\perp AC$，所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即，$(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

因为$CF\perp AB$，所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，从而得

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

于是有$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$，即得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$。这表明$AM\perp BC$。延长$AM$与$BC$交于$D$，则$AD$为$BC$边上的高。所以三角形$ABC$的三条高线交于一点$M$。

## 3.3 用坐标计算向量的内积

首先取一个仿射坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的坐标分别是$(a_1,a_2,a_3)$，$(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\&=a_1b_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_1b_3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3\\&\quad+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+a_2b_3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\\&\quad+a_3b_1\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1+a_3b_2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2+a_3b_3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}\tag{1.20}$$

可见只要知道基向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$之间的内积（9个数，实质上只有6个数）就可以求出任意两个向量的内积。这九个数称为仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$的**度量参数**。

现在设$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$是直角坐标系，则有：

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i=|\boldsymbol{e}_i|^2=1;\quad \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0,\quad i\neq j.$$

于是由(1.20)得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{1.21}$$

因此有

**定理1.6** 在直角坐标系中，两个向量的内积等于它们的对应坐标的乘积之和。

由定理1.6即得，向量$\boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3)$的长度为：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \tag{1.22}$$

两点$A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$之间的距离为：

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.23}$$

注意(1.21),(1.22),(1.23)三个式子只在直角坐标系中才成立。

### 3.4 方向角和方向余弦

在直角坐标系中，还可以用向量$\boldsymbol{a}$与基向量的内积来计算$\boldsymbol{a}$的坐标。设$\boldsymbol{a}$在直角标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的坐标为$(a_1,a_2,a_3)$，则有

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3,$$

两边用$\boldsymbol{e}_1$作内积，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=a_1.$$

同理可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=a_2,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=a_3.$$

这说明向量$\boldsymbol{a}$与基向量$\boldsymbol{e}_j$的内积就是$\boldsymbol{a}$的第$j$个直角坐标($j=1,2,3$)。

特别地，单位向量$\boldsymbol{a}^0$的直角坐标为：

$$x=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{e}_1=\cos\langle\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{e}_1\rangle=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1\rangle,$$

$$y=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_2\rangle,$$

$$z = \boldsymbol{a}^0 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3 \rangle.$$

我们把一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与直角标架中的基向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 所成的角 $\alpha, \beta, \gamma$ 称为方向 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，把方向角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为方向 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**。由上述知，$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦就等于单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 的直角坐标。从而有：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.24}$$

## 习 题 1.3

1． 已知 $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 2, \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\pi}{6}$，求 $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ 的内积。

2． 设 $OABC$ 是一个四面体，$|OA| = |OB| = 2$，$|OC| = 1$，$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{3}$，$\angle BOC = \frac{\pi}{6}$，$P$ 是 $AB$ 的中点，$M$ 是 $\triangle ABC$ 的重心。求 $|OP|$，$|OM|$ 和 $\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM} \rangle$。

3． 证明下列各对向量互相垂直。

(1) 直角坐标分别为 $(3,2,1)$ 和 $(2,-3,0)$ 的两个向量；

(2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{c}$。

4． 证明：$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$。

5． 证明：对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都有

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2|\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{b}|^2.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，说明此等式的几何意义。

6． 下列等式是否正确（习惯上把 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ 记成 $\boldsymbol{a}^2$）。

(1) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$，　　(2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$，

(3) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$，　　(4) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$。

7． 在直角坐标系中，已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的坐标分别为 $(3,5,7)$，$(0,4,3)$ 和 $(-1,2,-4)$，设

$$\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

求 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|$ 和 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$。

8． 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A, B, C$ 的直角坐标分别为 $(2,5,0)$，

(11,3,8)和(5,11,12)。求各边和各中线的长度。

9. 设$\triangle ABC$的三个顶点$A,B,C$的直角坐标分别为(2,4,3),(4,1,9),(10,-1,6)。证明$\triangle ABC$是直角三角形。

10. 证明：三角形三条中线的长度的平方和等于三边长度的平方和的$\frac{3}{4}$。

11. 证明：三角形的三边的垂直平分线交于一点。

12. 证明：如果一个四面体有两对对棱互相垂直，则第三对对棱也必垂直，并且三对对棱的长度的平方和相等。

13. 设方向$\boldsymbol{a}$的直角坐标为(1,2,-2)，求它的方向角和方向余弦。

14. 下述推断是否正确：若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，且$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

15. 证明：设三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，如果向量$\boldsymbol{x}$满足

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0,\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=0,\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

则$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。

*16. 证明：三向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}=0.$$

## §4 向量的外积

从力学中知道，作用在$A$点上的力$\boldsymbol{F}$关于支点$O$的力矩$\boldsymbol{M}$的大小为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}_2||\overrightarrow{OA}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OA}|\sin\langle\boldsymbol{F},\overrightarrow{OA}\rangle,$$

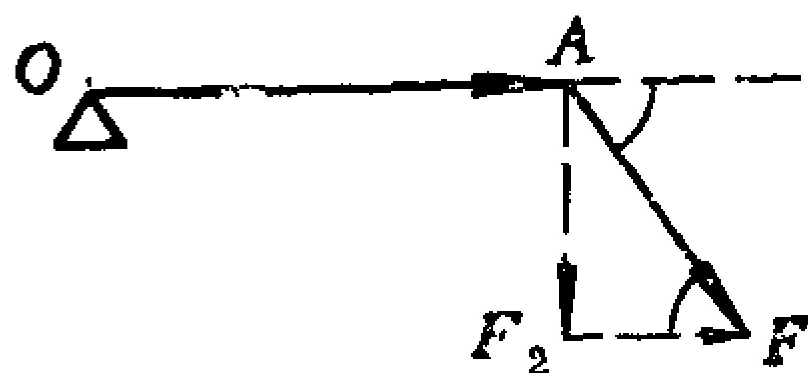


图 1.19

力矩$\boldsymbol{M}$的方向为：让右手四指从$\overrightarrow{OA}$弯向$\boldsymbol{F}$(转角小于$\pi$)，则拇指指向为$\boldsymbol{M}$的方向。本节我们来研究类似于从$\overrightarrow{OA}$和$\boldsymbol{F}$求力矩$\boldsymbol{M}$这样的向量运算。

### 4.1 向量的外积的定义

**定义1.11** 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**外积**(记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$)仍是一个向量，它的长度规定为：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|:=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle, \tag{1.25}$$

它的方向规定为：与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均垂直，并且使$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$成右手系，即，当右手四指从$\boldsymbol{a}$弯向$\boldsymbol{b}$(转角小于$\pi$)时，拇指的指向就是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向。

如果$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中有一个为$\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{0}$。

由定义立即看出：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$的充分必要条件是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线。因此要特别注意：若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，不能断定$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中必有一个为$\boldsymbol{0}$。这是与数的乘法很不一样的地方。

### 4.2 向量的外积的几何意义，平面的定向

外积的几何意义：当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线时，从(1.25)看出，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积。为了说明$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向的几何意义，我们需要先给出所谓**平面的定向**的概念。

平面的定向，就是平面上的旋转方向。在平面几何中，常用“反时针方向”与“顺时针方向”来描述平面上的两个旋转方向。对于放在三维空间中的平面，这种说法不足以描述平面上的旋转方向：从这一侧看来是反时针的旋转方向，从另一侧看就成了顺时针的。因此通常用另一种方法来描述：

给了平面$\pi_0$上的一对不共线向量，如果规定了它们的先后顺序，则从第一个向量到第二个向量的转角小于$\pi$的旋转方向就称为平面$\pi_0$的一个定向。譬如，设$\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0$不共线，如果规定先$\boldsymbol{a}_0$后$\boldsymbol{b}_0$的顺序，则从$\boldsymbol{a}_0$到$\boldsymbol{b}_0$的转角小于$\pi$的旋转方向是平面$\pi_0$的一个定向，如图1.20所示。但是如果规定先$\boldsymbol{b}_0$后$\boldsymbol{a}_0$的顺序，则从$\boldsymbol{b}_0$到$\boldsymbol{a}_0$的转角小于$\pi$的旋转方向是平面$\pi_0$的另一个定向，它与前述定向相反，如图1.21所示。

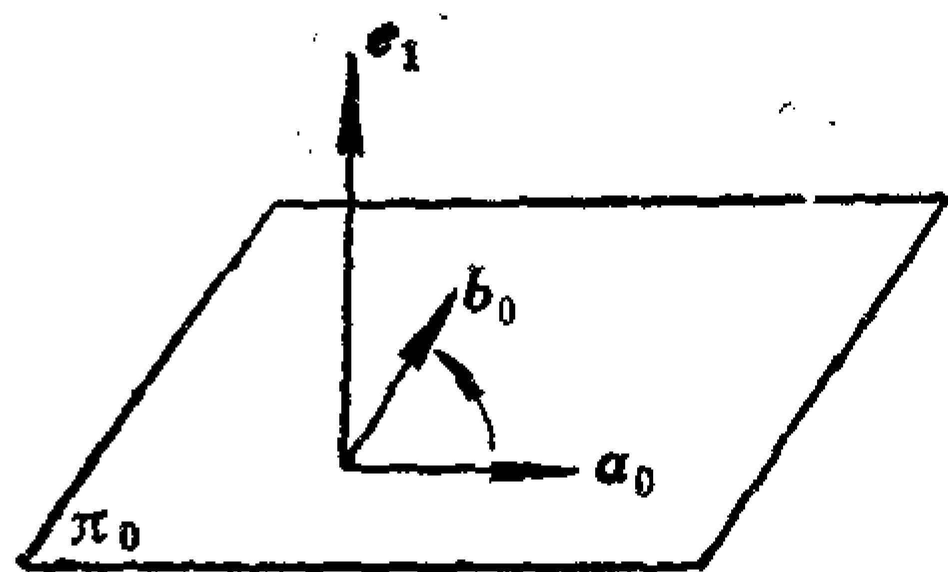



图 1.20

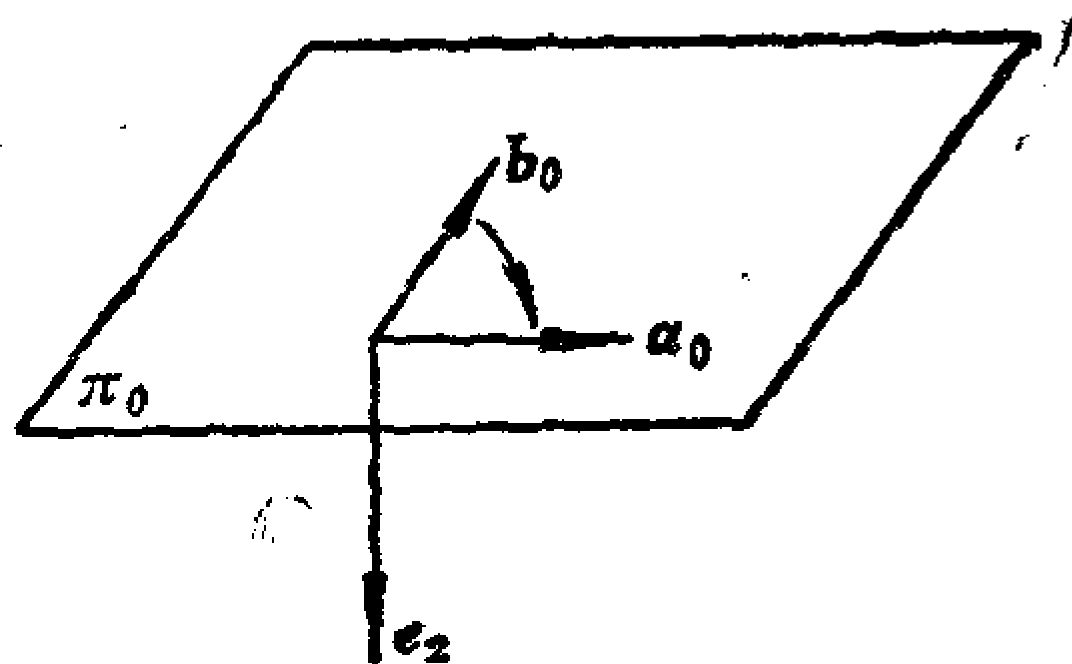



图 1.21

平面的两个定向，也可以用平面的两侧来代表：如果右手四指沿平面上取定的旋转方向弯曲，拇指必指向平面的一侧。这样，平面的两个定向就对应于平面的两侧，而平面的两侧又可用垂直于该平面的两个方向(或单位向量)来刻划，因此通常也用垂直于平面的方向来表示平面的定向：设 $\boldsymbol{e}_1$ 是与平面 $\pi_0$ 垂直的向量，如果右手四指从 $\boldsymbol{a}_0$ 弯向 $\boldsymbol{b}_0$(转角小于 $\pi$)时拇指的指向为 $\boldsymbol{e}_1$ 的方向，则 $\boldsymbol{e}_1$ 表示的平面 $\pi_0$ 的定向就是由 $\boldsymbol{a}_0$ 到 $\boldsymbol{b}_0$ 的旋转方向(转角小于 $\pi$)，见图 1.20。设 $\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 方向相反，则 $\boldsymbol{e}_2$ 表示的平面 $\pi_0$ 的定向就是由 $\boldsymbol{b}_0$ 到 $\boldsymbol{a}_0$ 的旋转方向，见图 1.21。

现在来看外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向的几何意义。设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是平面 $\pi_0$ 上不共线的两个向量，由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\pi_0$ 垂直，并且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向就是当右手四指从 $\boldsymbol{a}$ 弯向 $\boldsymbol{b}$(转角小于 $\pi$)时拇指的指向，因此由上一段知道，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向就代表了平面 $\pi_0$ 上的从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的旋转方向，这就是外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向的几何意义。

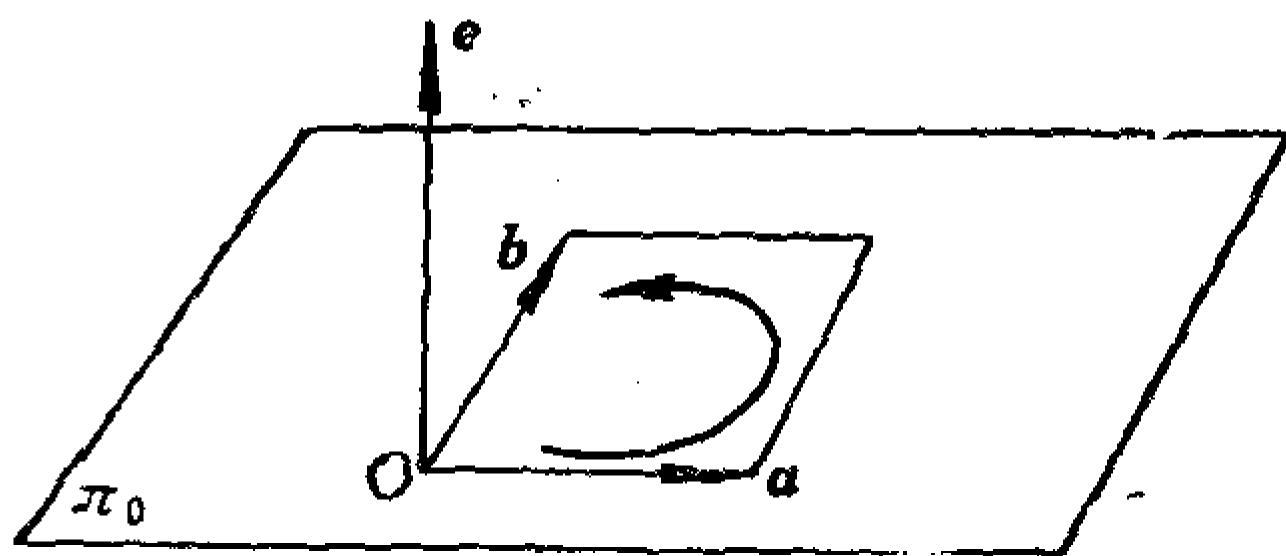



图 1.22

考虑平面 $\pi_0$ 上的一个平行四边形，它的两条邻边分别用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示，我们规定它的边界的环行方向为从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的旋转方向（转角小于 $\pi$)，这时称这个平行四边形是**定向的**。现在假定我们已经用单位向量 $\boldsymbol{e}$ 规定了平面 $\pi_0$

的定向，那末对于平面 $\pi_0$ 上的定向平行四边形，我们可以给它的面积一个正负号：如果它的边界的环行方向与事先规定的 $\pi_0$ 的定向一致，其面积规定为正；如果不一致，就规定为负，这叫做定向平行四边形的**定向面积**，它是一个实数。对于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的上述定向平行四边形，其定向面积用 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表示。因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}$，显然 $|k|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，并且 $k>0$ 表明这个定向平行四边形的边界的环行方向（由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的旋转方向）与 $\pi_0$ 的定向一致，$k<0$ 则不一致，因此，$k=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，从而有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}. \tag{1.26}$$

### 4.3 向量的外积的运算规律

**命题1.9** 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$，其中 $\boldsymbol{b}_2$ 是 $\boldsymbol{b}$ 沿方向 $\boldsymbol{a}$ 的外射影。

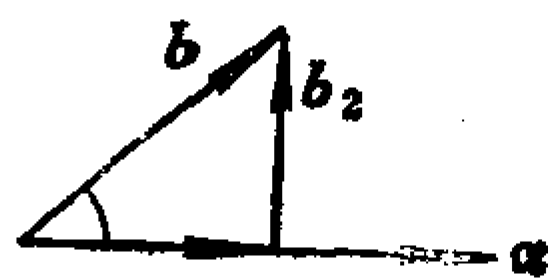


图 1.23

**证明** 设 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$，其中 $\boldsymbol{b}_1\parallel\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}_2\perp\boldsymbol{a}$。由直角三角形的解法知，

$$|\boldsymbol{b}_2|=|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

于是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}_2|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2|$。

由图 1.23 易看出，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$ 的方向相同，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2.$$

**命题1.10** 设 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 按右手螺旋规律绕 $\boldsymbol{e}$ 旋转 90° 得到的向量 $\boldsymbol{b}'$。

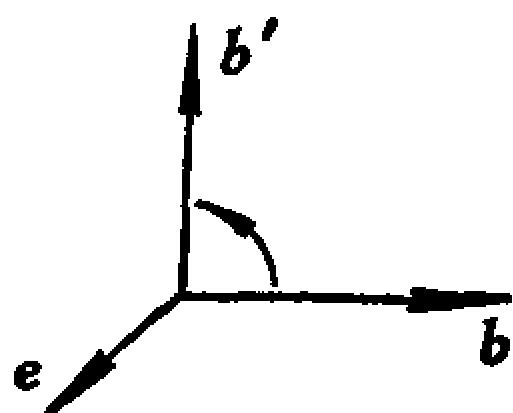


图 1.24

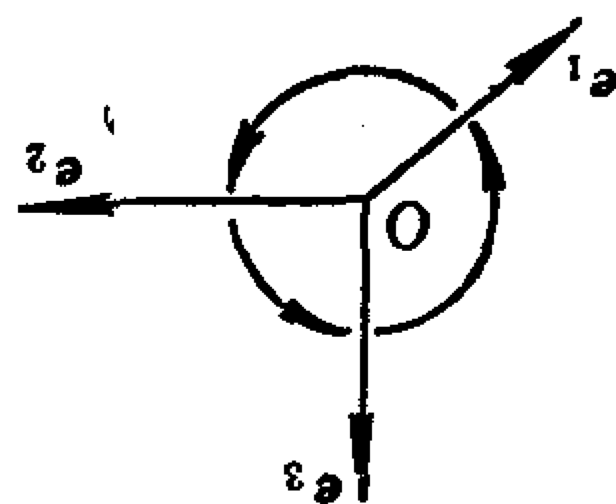


图 1.25

**证明** $|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{e}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}'|$，又由图1.24看出，$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}'$ 同向，所以 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'$。

**推论1.4** 若 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 为右手直角坐标系，则有

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2.$$

**定理1.7** 外积适合下列运算规律：对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$和任意实数 $\lambda$，有

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（反交换律），

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$（左分配律），

$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$（右分配律）.

**证明** (1) 由定义 1.11 立即得到。

(2) $|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$

$$=|\lambda||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|,$$

$\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，所以 $\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$同向；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 反向，从而 $\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$同向，因此有

$$\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

(3) 先证左分配律。若 $\boldsymbol{a}=0$，则结论显然成立。下设 $\boldsymbol{a}\neq 0$，因为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0)\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{a}^0\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})],$$

所以只要考虑 $\boldsymbol{a}^0\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。设 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$，其中 $\boldsymbol{b}_1\parallel\boldsymbol{a}^0\perp\boldsymbol{b}_2$；设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2$，其中 $\boldsymbol{c}_1\parallel\boldsymbol{a}^0\perp\boldsymbol{c}_2$。于是

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{c}_1)+(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2).$$

因为$(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{c}_1)\parallel\boldsymbol{a}^0$，$(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2)\perp\boldsymbol{a}^0$，于是据命题1.9得：

$$\boldsymbol{a}^0\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}^0\times(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2).$$

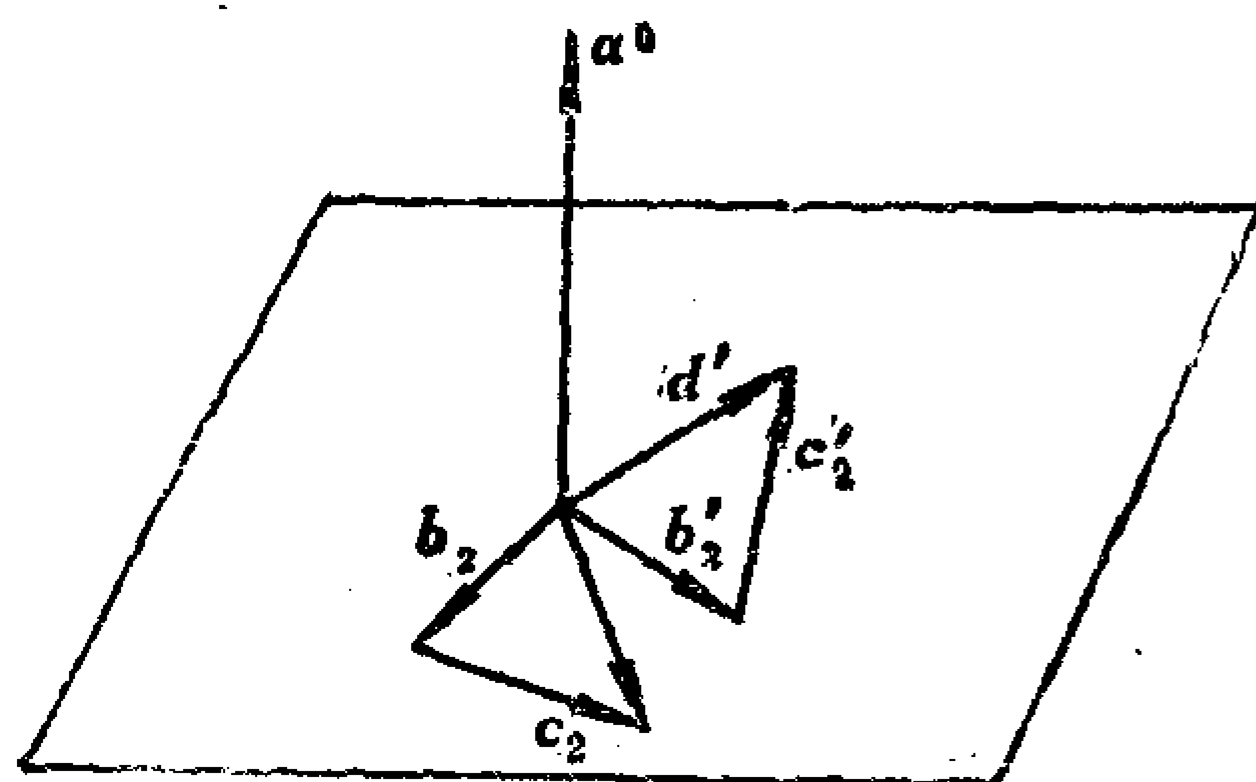



图 1.26

再据命题 1.10知，$\boldsymbol{a}^0\times(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2)$等于$(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2)$绕 $\boldsymbol{a}^0$ 右旋 $90^\circ$ 得到的向量 $\boldsymbol{d}'$。同理，$\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}_2$ 是将 $\boldsymbol{b}_2$ 绕 $\boldsymbol{a}^0$右旋 $90^\circ$得到的向量 $\boldsymbol{b}_2'$，$\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{c}_2$是将 $\boldsymbol{c}_2$ 绕 $\boldsymbol{a}^0$ 右旋 $90^\circ$ 得到的向量 $\boldsymbol{c}_2'$。因为 $\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2$ 可连成一

个三角形，所以把它们绕$\boldsymbol{a}^0$右旋90°得到的向量 $\boldsymbol{b}_2'$, $\boldsymbol{c}_2'$, $\boldsymbol{d}_2'$ 也一定可以连成一个三角形，于是 $\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{b}_2' + \boldsymbol{c}_2'$，即

$$\boldsymbol{a}^0 \times (\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{a}^0 \times \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}^0 \times \boldsymbol{c}_2.$$

从而得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= |\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{a}^0 \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] = |\boldsymbol{a}|[\boldsymbol{a}^0 \times (\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{c}_2)] \\ &= |\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{a}^0 \times \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}^0 \times \boldsymbol{c}_2) \\ &= |\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{a}^0 \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^0 \times \boldsymbol{c}) \\ &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

再证右分配律。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} &= -\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \\ &= -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \\ &= \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

### 4.4 用坐标计算向量的外积

先取一个仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的坐标分别是$(a_1, a_2, a_3)$，$(b_1, b_2, b_3)$。则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3, \end{aligned} \tag{1.27}$$

由此可见，只要知道基向量之间的外积，就可求出 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。

现在设$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$是右手直角标架，据推论 1.4，由(1.27)得到

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3. \tag{1.28}$$

于是我们有

**定理1.8** 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 在右手直角坐标系中的坐标分别为

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3),$$

则 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 的坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right), \qquad (1.29)$$

从而

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}. \qquad (1.30)$$

由外积的几何意义知，(1.30)式也是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积公式。

**注** (1.28),(1.29),(1.30)只在右手直角坐标系中才成立。

作为一种记忆方式，(1.28)可以形式地写成：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.28)'$$

### 4.5 二重外积

**命题1.11** 对任意向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}. \qquad (1.31)$$

(1.31)称为二重外积公式。

**证明** 取一个右手直角坐标系，设

$$\boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}(c_1,c_2,c_3).$$

设$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$的坐标为$(d_1,d_2,d_3)$，设$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$的坐标为$(h_1,h_2,h_3)$。由(1.29)得：

$$\begin{aligned} h_1 &= a_2d_3-a_3d_2 = a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3) \\ &= b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3) \\ &= b_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-a_1c_1)-c_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-a_1b_1) \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1. \end{aligned}$$

同理可得

$$h_2 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_2, \quad h_3 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3.$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

由公式(1.31)和外积的反交换律可得到：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b},$$

从而在一般情况下，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，即向量的外积不适合结合律。

请读者证明下述的雅科比(Jacobi)等式：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0. \tag{1.32}$$

## 习　题　1.4

1．证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

2．证明：若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线。

3．在右手直角坐标系中，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标分别是

$$(5,-2,1),(4,0,6),$$

求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

4．在右手直角坐标系中，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别是

$$(1,0,-1),(1,-2,0)\text{和}(-1,2,1),$$

求
$$(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

5．证明：$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，并且说明它的几何意义。

6．证明：若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，并且说明其几何意义。

7．证明三角形的重心分原三角形成三个等积的三角形。

8．在平面右手直角坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$中，设$\triangle ABC$的三个顶点 $A,B,C$ 的坐标分别为

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3).$$

证明　$\triangle ABC$ 的面积为

$$s=\pm\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix},$$

并且说明正负号的几何意义。

9. 下述推断是否正确?

若 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{c}\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

10. 设 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ 共线，试讨论 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的关系。

11. 就下列各种情形，讨论 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的关系($\boldsymbol{a}\neq 0$)。

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}$;

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}$;

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}$，并且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}$。

*12. 设 $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{x}$，求满足方程 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的点 $P$ 的轨迹。

*13. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都不是 0, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=h\neq 0$，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，求 $\boldsymbol{x}$(讨论各种情况)。

14. (1) 已知 $|\boldsymbol{e}|=1$，$\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{r}$，将 $\boldsymbol{r}$ 绕 $\boldsymbol{e}$ 右旋角度 $\theta$ 得 $\boldsymbol{r}_1$，试用 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{r},\theta$ 表示 $\boldsymbol{r}_1$。

(2) 给定三点 $O,A,P$, $O\neq A$，将 $P$ 绕 $\overrightarrow{OA}$ 右旋角度 $\theta$ 得到 $P_1$，试用 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}$，$\theta$ 表示 $\overrightarrow{OP_1}$。

## §5 向量的混合积

### 5.1 向量的混合积的几何意义和性质

如何利用向量来计算几何体的体积? 由于计算几何体的体积可以归结为计算平行六面体的体积，因此我们来讨论平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$(如图1.27)。设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，则底面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，高为 $|\overrightarrow{AH}|$，其中 $\overrightarrow{AH}$ 是 $\boldsymbol{c}$ 在方向 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 上的内射影，因此

$$|\overrightarrow{AH}|=\left|\prod_{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0}\boldsymbol{c}\right|.$$

从而平行六面体的体积为:

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\left|\prod_{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0}\boldsymbol{c}\right|=\left|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\prod_{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^0}\boldsymbol{c}\right|$$

$$=|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**。上述表明：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积。若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>0$，则$\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$为锐角，由于$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$构成右手系，于是$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$此时也构成右手系。类似的讨论知，若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}<0$，则$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$构成左手系。因此$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$的正负可判断$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$是右手系还是左手系。如果在平行六面体的同一顶点上的三条棱之间规定好一个顺序$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，则称这个平行六面体的**定向**为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$。于是混合积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$既表示了这个定向平行六面体的体积，又表示了它的定向，所以把$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$称为这个定向平行六面体的**定向体积**。

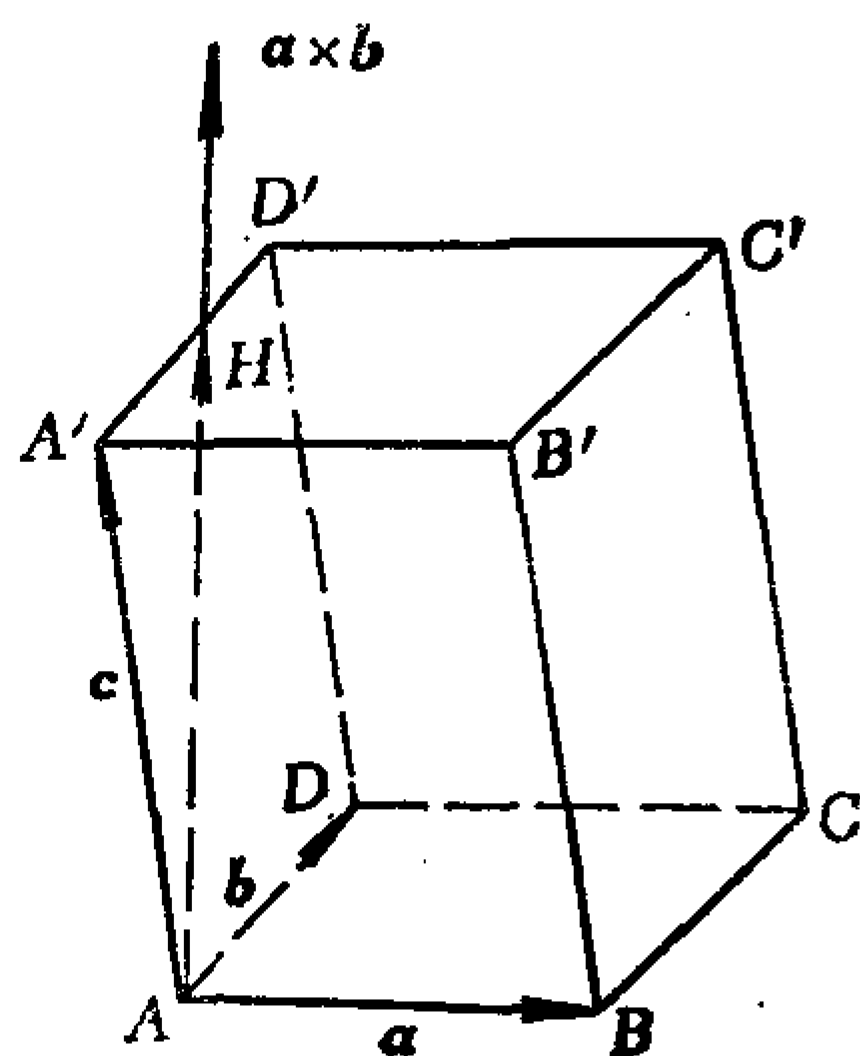



图 1.27

由混合积的几何意义立即得到：

**命题1.12** 三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

混合积有以下两条常用的性质：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

**证明** (1) 因为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$都表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为同一顶点上的三条棱的平行六面体的体积，所以它们相等。又因为若$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$为右(左)手系，则$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$和$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$均为右(左)手系，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

性质(2)说明三个有序向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积与"×"，"·"的位置无关，因此可把$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 记成$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,要注意的是，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 仍然是要先作外积 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,后作内积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$,反之则没有意义。

### 5.2 用坐标计算向量的混合积

取一个仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$。设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别为$(a_1,a_2,a_3)$,$(b_1,b_2,b_3)$,$(c_1,c_2,c_3)$。则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&=[(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1\\&\quad+(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3]\cdot(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3)\\&=[(a_1b_2-a_2b_1)c_3+(a_3b_1-a_1b_3)c_2\\&\quad+(a_2b_3-a_3b_2)c_1]\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\\&=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}\tag{1.33}$$

由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，所以 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\neq0$。于是得到

**命题1.13** 任意取定一个仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别是

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),$$

则

$$\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.\tag{1.34}$$

**定理1.9** 若$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$为右手直角标架，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别为

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),$$

则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.\tag{1.35}$$

**证明** 因为$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$为右手直角标架，所以 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$.

从而 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1$。于是由(1.34)立即得到(1.35)。

定理 1.9 表明：以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的定向体积等于以这三个向量的右手直角坐标为列组成的三阶行列式。这是三阶行列式的几何意义。

### 5.3 三向量(或四点)共面的条件

**定理1.10** 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的仿射坐标分别为

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),$$

则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

**证明** 由命题 1.12 和 1.13 立即得到。

**推论1.5** 设四个点 $A,B,C,D$ 的仿射坐标分别为

$$(x_i,y_i,z_i),\quad i=1,2,3,4.$$

则 $A,B,C,D$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

这里我们指出，四阶行列式可以沿任意一行（或一列）展开，譬如上述四阶行列式沿第四行展开得

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{4+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{4+4}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

并且四阶行列式也具有类似于二阶、三阶行列式那样的性质。

**推论1.5的证明** $A,B,C,D$ 共面也就是$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ 共面，从而充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1-x_4 & x_2-x_4 & x_3-x_4 \\ y_1-y_4 & y_2-y_4 & y_3-y_4 \\ z_1-z_4 & z_2-z_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}=0,$$

上式左边的三阶行列式等于

$$\begin{vmatrix} x_1-x_4 & x_2-x_4 & x_3-x_4 & x_4 \\ y_1-y_4 & y_2-y_4 & y_3-y_4 & y_4 \\ z_1-z_4 & z_2-z_4 & z_3-z_4 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

最后这个等式成立是因为把左边的四阶行列式的第四列分别加到第一、二、三列上，这时行列式的值不变。综上述便得到我们所要的结论。

## 5.4 拉格朗日恒等式及其应用

**定理1.11** 对任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix}. \tag{1.36}$$

(1.36)称为拉格朗日(Lagrange)恒等式。

**证明** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$

$$=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]$$

$$= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

拉格朗日恒等式很有用，有人还称它为二维的勾股定理，这是因为由它可以证出下面例1.5所述的命题。

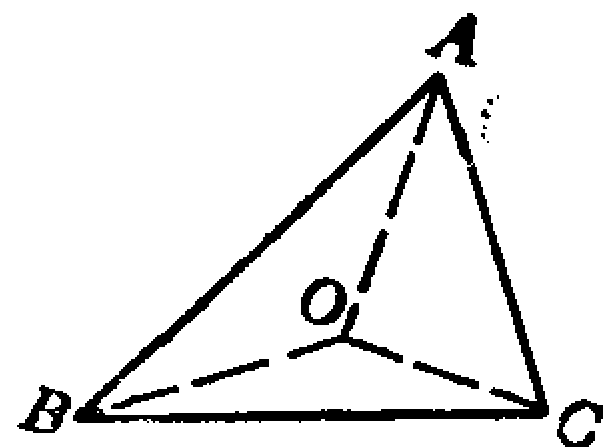



图 1.28

**例1.5** 证明：三直角棱锥的斜面面积的平方等于其他三个面的面积的平方和。

**证明** 设$O$-$ABC$是三棱锥，其中$\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$。$\triangle ABC$是它的斜面。我们有

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} \end{vmatrix}$$

$$= |\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2$$

$$= (|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2)(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2) - [(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})]^2$$

$$= |\overrightarrow{OA}|^4 + |\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^4$$

$$= (|\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OA}|)^2 + (|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OC}|)^2 + (|\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OC}|)^2.$$

由此即得我们所要的结论。

## *5.5 向量代数在球面三角中的应用

设在中心为$O$，半径为$R$的球面上，有不在同一大圆弧上的三点$A,B,C$。分别连结其中两点的大圆弧$\alpha = \overset{\frown}{BC}$，$\beta = \overset{\frown}{CA}$，

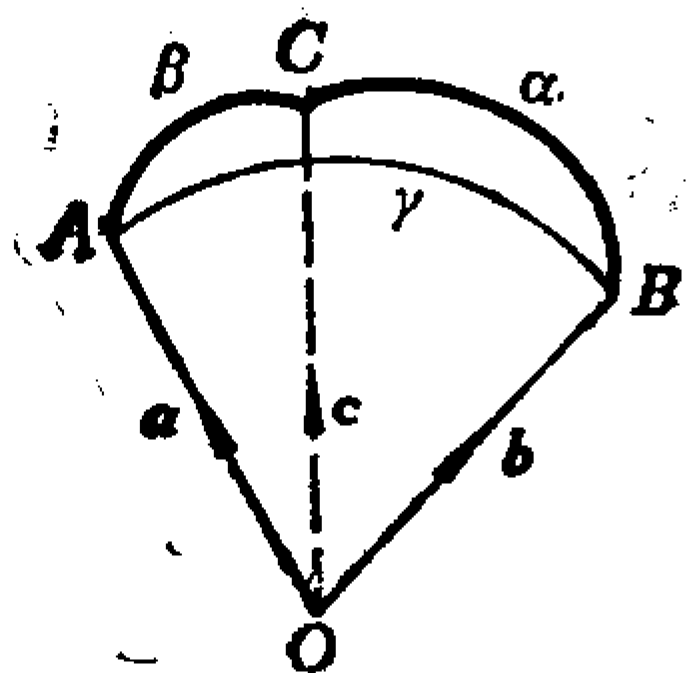



图 1.29

$\gamma=\widehat{AB}$ 围成一个区域，称为**球面三角形**，$A,B,C$ 是它的**顶点**；$\alpha,\beta,\gamma$ 是它的**边**，用边所在的大圆弧的弧度来量度。边 $\beta$ 与 $\gamma$ 所夹的角是指 $\beta$ 与 $\gamma$ 分别所在的平面组成的二面角，仍记作 $A$，称为球面三角形的**内角**。

我们可以用向量法证明球面三角的下述公式：

(1) $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$（余弦公式）；

(2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}=\dfrac{\sin\beta}{\sin B}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$（正弦公式）.

**证明** (1) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 分别是$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$方向的单位向量. 显然角 $A$ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 的夹角. 据拉格朗日恒等式有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}\\
&=\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\\
&=\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma,
\end{aligned}
$$

又有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\rangle\\
&=\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\cos A\\
&=\sin\gamma\sin\beta\cos A,
\end{aligned}
$$

所以 $$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

(2) 由二重外积公式得：

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},\\
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b},\\
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\\
&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}.
\end{aligned}
$$

所以

$$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|.$$

由外积的定义可得：

$$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\sin A = \sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\sin\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\sin B$$
$$= \sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\sin\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\sin C,$$

即 $$\sin\gamma\sin\beta\sin A = \sin\gamma\sin\alpha\sin B = \sin\beta\sin\alpha\sin C.$$

由此即得正弦公式。

## 习 题 1.5

1. 证明：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$。

2. 证明：如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面。

3. 在右手直角坐标系中，一个四面体的顶点 $A,B,C,D$ 的坐标分别是

$$(1,2,0),(-1,3,4),(-1,-2,-3),(0,-1,3),$$

求它的体积。

4. 证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$。

5. 证明：$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) = 0.$$

6. 证明：$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})] = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$。

*7. 证明：(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$；

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}$。

*8. 证明：对任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，有

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=0.$$

9. 若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ 共面，讨论 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的关系。

10. 证明：$$[\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)]\times[\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)] = |\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|^2\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2).$$

11. 证明：若 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线，则 $\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$ 与 $\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$ 不共线。

12. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，证明：任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}\boldsymbol{e}_1+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}\boldsymbol{e}_2+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}\boldsymbol{e}_3.$$

13. 用向量法证明：若三元一次方程组的系数行列式不等于零，则它有唯一的一个解.

*14. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=f,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=g,\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=h.$$

证明

$$\boldsymbol{x}=\frac{f(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+g(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+h(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}.$$

# 第二章　空间的平面和直线

本章将把坐标法和向量法结合起来研究空间中平面和直线的方程以及它们的性质。

## §1　仿射坐标系中平面的方程，两平面的相关位置

### 1.1　平面的参数方程和普通方程

读者已经知道，确定一个平面的条件是：不在一直线上的三点；或者一条直线和此直线外的一点；或者两条相交直线；或者两条平行直线。为了便于用向量法，我们采用"一个点和两个不共线的向量确定一个平面"作为讨论的出发点。

取定一个仿射标架 $[O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$。已知一个点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，向量 $\boldsymbol{v}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 和向量 $\boldsymbol{v}_2(X_2, Y_2, Z_2)$，其中 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线，我们来求由点 $M_0$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 确定的平面 $\pi$ 的方程。

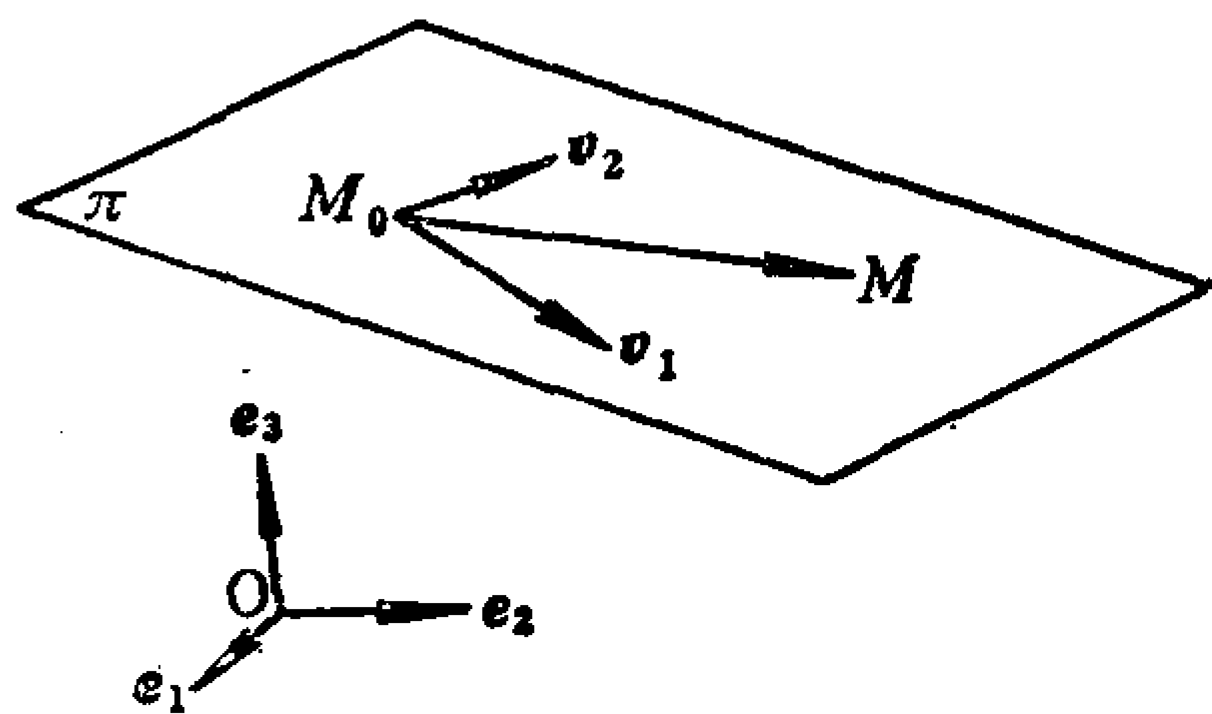


图　2.1

点 $M(x, y, z)$ 在平面 $\pi$ 上的充分必要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 共面（如图 2.1）。因为 $\boldsymbol{v}_1 \not\parallel \boldsymbol{v}_2$，所以 $\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 共面的充分必要条件是存在唯一的一对实数 $\lambda, \mu$ 使得：

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \boldsymbol{v}_1 + \mu \boldsymbol{v}_2.$$

用坐标写出即得：

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2, \\ y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2. \end{cases} \qquad (2.1)$$

(2.1)称为平面$\pi$的**参数方程**，其中$\lambda,\mu$称为**参数**，它们可取任意实数。

又有$\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & X_1 & X_2 \\ y-y_0 & Y_1 & Y_2 \\ z-z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}=0, \tag{2.2}$$

即

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{2.3}$$

其中

$$A=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix},\ B=-\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

(2.3)称为平面$\pi$的**普通方程**。由于$\boldsymbol{v}_1$与$\boldsymbol{v}_2$不共线，据定理1.4知，$A,B,C$不全为零，因此平面$\pi$的方程(2.3)是三元一次方程。

我们来看平面$\pi$的方程(2.3)中系数的几何意义。

**定理2.1** 设平面$\pi$的方程是(2.3)，则向量$\boldsymbol{\omega}(r,s,t)$平行于平面$\pi$的充分必要条件是

$$Ar+Bs+Ct=0. \tag{2.4}$$

**证明** $\boldsymbol{\omega}\,/\!/$平面$\pi$的充分必要条件是$\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$共面，从而

$$\begin{vmatrix} r & X_1 & X_2 \\ s & Y_1 & Y_2 \\ t & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$Ar+Bs+Ct=0.$$

因为平面$\pi$的方程(2.3)中$A,B,C$不全为零，譬如说$A\neq0$，则从(2.4)可解得：$\boldsymbol{\omega}_1\left(-\frac{B}{A},1,0\right)$，$\boldsymbol{\omega}_2\left(-\frac{C}{A},0,1\right)$，于是它们均平行于平面$\pi$，且据定理1.4知，它们不共线。由于与平面$\pi$平行的两个不共线的向量决定了平面$\pi$的方向，因此平面方程中

一次项的系数决定了这个平面的方向。

**推论2.1** 设平面$\pi$的方程是(2.3)，则平面$\pi$平行于$x$轴(或$y$轴，或$z$轴)的充分必要条件是$A=0$(或$B=0$，或$C=0$)；平面$\pi$通过原点的充分必要条件是$D=0$。

**证明** 因为$\boldsymbol{e}_1$的坐标是$(1,0,0)$，所以$\boldsymbol{e}_1 /\!/$平面$\pi$的充分必要条件是

$$A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0,$$

即$A=0$。关于$\boldsymbol{e}_2$或$\boldsymbol{e}_3$平行于平面$\pi$的情形可类似讨论。

原点$O(0,0,0)$在平面$\pi$上的充分必要条件是$D=0$。

**定理2.2** 在空间中取定一个仿射坐标系，则平面的方程必定是三元一次方程；反之，任意一个三元一次方程表示一个平面。

**证明** 定理的前半部分已经在前面说明。现在看后半部分。任给一个三元一次方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{2.5}$$

不妨设$A_1\neq 0$。取点$M_1\left(-\frac{D_1}{A_1},0,0\right)$，取$\boldsymbol{\mu}_1\left(-\frac{B_1}{A_1},1,0\right)$，$\boldsymbol{\mu}_2\left(-\frac{C_1}{A_1},0,1\right)$，显然它们不共线。由点$M_1$和$\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2$决定的平面$\pi_1$的方程为：

$$\begin{vmatrix} x+\frac{D_1}{A_1} & -\frac{B_1}{A_1} & -\frac{C_1}{A_1} \\ y-0 & 1 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

这说明方程(2.5)表示一个平面$\pi_1$，它经过点$M_1$，且平行于$\boldsymbol{\mu}_1$和$\boldsymbol{\mu}_2$。

**例2.1** 画出平面$x+2y-z=0$。

**解** 因为$D=0$，所以此平面过原点。解方程

$$r + 2s - t = 0,$$

求得两个不共线向量 $\omega_1(2,-1,0)$，$\omega_2(1,0,1)$。以原点为起点画出 $\omega_1,\omega_2$。所求平面就是由原点和 $\omega_1$，$\omega_2$ 决定的平面(如图 2.2)。

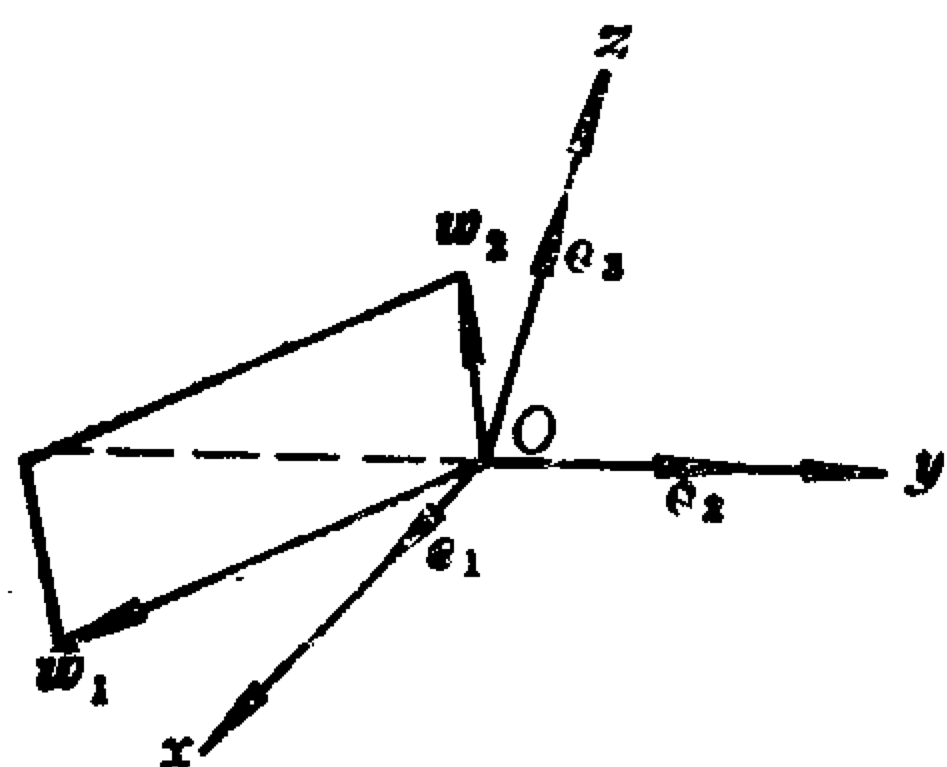



图 2.2

如果平面的方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 满足 $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$，则此平面与三根坐标轴均相交，且交点不是原点，因此这三个交点不共线，把它们画出来，它们决定的平面就是所求平面。如果平面的方程中 $B = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$，则此平面与 $y$ 轴平行，与 $x$ 轴、$z$ 轴均相交，且交点不是原点。把这两个交点画出来，再分别过它们画与 $y$ 轴平行的直线，由此即得所求平面。其余情况如何画平面，请读者思考。

## 1.2 两平面的相关位置

两平面的相关位置有三种可能情形：(1) 相交于一条直线；(2) 平行；(3) 重合。如何从两平面的方程判断它们属于何种情形？

**定理2.3** 取定一个仿射标架，设平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的方程分别是：

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

则

(1) $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 相交的充分必要条件是它们方程中的一次项系数不成比例；

(2) $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 平行的充分必要条件是它们方程中一次项系数成比例，但常数项不与这些系数成比例；

(3) $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 重合的充分必要条件是它们方程中所有系数成比例。

**证明** 充分性。

(1) 设 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的方程中一次项系数不成比例，则坐标为 $(A_1,B_1,C_1)$ 的向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与坐标为$(A_2,B_2,C_2)$的向量 $\boldsymbol{a}_2$ 不共线，从而据定理1.4知，下述三个行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

不全为零。不妨设第一个行列式不为零。则在方程组(2.6)中令 $z=0$，得

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+D_2=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

因为方程组(2.7)的系数行列式不为零，所以它有唯一解：

$$x=x_0, y=y_0.$$

于是 $x=x_0, y=y_0, z=0$ 是方程组(2.6)的解，即 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 有公共点，且第三个坐标为零的公共点只有一个$(x_0,y_0,0)$。因为(2.7)的第一个方程有无穷多个解，所以可取到它的另一个解 $x=x_1, y=y_1$，于是点$(x_1,y_1,0)$是 $\pi_1$ 上的点，但不是 $\pi_2$ 上的点。所以 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 相交。

(2) 由已知条件得，存在一个实数 $\lambda\neq 0$，使得：

$$A_2=\lambda A_1, B_2=\lambda B_1, C_2=\lambda C_1, D_2\neq\lambda D_1.$$

于是方程组(2.6)成为：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+\dfrac{D_2}{\lambda}=0. \end{cases}$$

因为 $D_1\neq\dfrac{D_2}{\lambda}$，所以此方程组无解，即 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 沒有公共点，从而 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 平行。

(3) 由已知条件得，存在实数 $\lambda\neq 0$，使得：

$$A_2=\lambda A_1, B_2=\lambda B_1, C_2=\lambda C_1, D_2=\lambda D_1.$$

于是方程组(2.6)成为：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0. \end{cases}$$

显然第一个方程的解全是第二个方程的解，反之亦然，所以 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 重合。

**必要性。**

利用以上结果，采用反证法即得。

### 1.3　三平面恰交于一点的条件

**命题2.1**　设三个平面在仿射坐标系中的方程分别为：

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ &A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ &A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

则这三个平面恰交于一点的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

**证明**　上述三个平面恰交于一点的充分必要条件是方程组(2.8)有唯一解，从而它的系数行列式不等于零。

### 习　题　2.1

1．在给定的仿射坐标系中，求下列平面的普通方程和参数方程。

(1) 过点$(-1,2,0)$,$(-2,-1,4)$,$(3,1,-5)$；

(2) 过点$(1,0,-2)$和$(-1,3,2)$，平行于$\boldsymbol{v}(1,-2,4)$；

(3) 过点$(3,1,-2)$和 $z$ 轴；

(4) 过点$(2,0,-1)$和$(-1,3,4)$，平行于 $y$ 轴；

(5) 过点$(-1,-5,4)$，平行于平面 $3x-2y+5=0$。

2．在给定的仿射坐标系中，画出下列平面。

(1) $2x+3y+z-6=0$；　　(2) $4x+3z+2=0$；

(3) $3x-y+4z=0$;　　　　　(4) $3y+2=0$。

3． 证明：经过三个定点$(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3$的平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4． 在给定的仿射坐标系中，设平面$\pi$的方程为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

其中$abc\neq 0$，说明$a,b,c$的几何意义。

5． 坐标满足方程

$$(ax+by+cz+d)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2=0$$

的点的轨迹是什么？

6． 判断下列各对平面的相关位置。

(1) $2x+y-3z-1=0$ 与 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}-\frac{z}{2}+2=0$;

(2) $x-2y+z-2=0$ 与 $3x+y-2z-1=0$;

(3) $3x+9y-6z+2=0$ 与 $2x+6y-4z+\frac{4}{3}=0$。

7． 在给定的仿射坐标系中，证明：通过点$(x_0,y_0,z_0)$并且与平面$Ax+By+Cz+D=0$平行的平面的方程为：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

8． 下述三个平面是否恰交于一点？

$2x+3y-z+1=0$，$x-2y+5z-3=0$，$2x+y+z+5=0$。

9． 证明：分别由方程

$$ax+by+cz+d=0,$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0,$$

$$\lambda(ax+by+cz)+\mu(\alpha x+\beta y+\gamma z)+k=0,$$

给出的三个平面，当 $k\neq\lambda d+\mu\delta$ 时，沒有公共点。

10．证明：任何一个经过相交两平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线 $l$ 的平面方程能写成：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{2.9}$$

其中 $\lambda,\mu$ 是不全为零的实数（我们把经过一条直线的所有平面称为**平面束**。本题说明：平面束的方程形如(2.9)，其中 $\lambda,\mu$ 取遍不全为零的实数)。

11．求经过点 $M_0(1,-2,0)$，并且经过两平面 $2x-y+z-3=0$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的交线的平面方程。

*12．设平面 $\pi$：$Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的线段相交于点$M$，且$\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$。证明

$$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

*13．设有三个平行平面

$$\pi_i:\ A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\ \ i=1,2,3.$$

一直线 $l$ 与 $\pi_1,\pi_2,\pi_3$ 分别交于 $P,Q,R$。求 $Q$ 分有向线段 $\overrightarrow{PR}$ 的比值。

## §2 直角坐标系中平面的方程，点到平面的距离

### 2.1 直角坐标系中平面方程的系数的几何意义

确定一个平面的条件还可以是：一个点和一个与这平面垂直的非零向量。与一个平面垂直的非零向量称为这个平面的**法向量**。

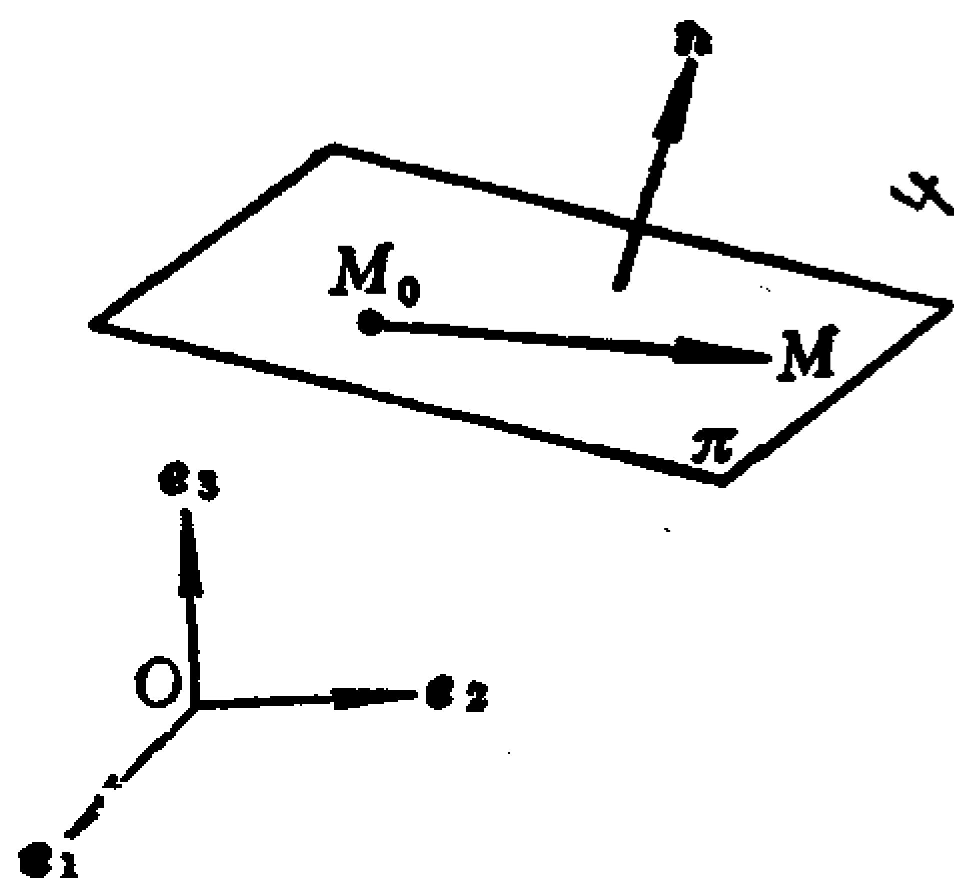


图 2.3

取一直角标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$。我们来求过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，且法向量为$\boldsymbol{n}(a,b,c)$的平面$\pi$的方程。

点$M(x,y,z)$在平面$\pi$上的充分必要条件是$\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，从而$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$，于是得

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

即

$$ax+by+cz+h=0, \tag{2.10}$$

其中$h=-(ax_0+by_0+cz_0)$。(2.10)就是所求平面$\pi$的方程。

由此可见，在直角坐标系中，平面方程的一次项系数是这个平面的一个法向量$\boldsymbol{n}$的坐标。

### 2.2 点到平面的距离

**命题2.2** 在直角坐标系中，点$P_1(x_1,y_1,z_1)$到平面

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$$

的距离为：

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.11}$$

**证明** 作$P_1$到平面$\pi$的垂线，设垂足为$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$P_1$ 到平面 $\pi$ 的距离为 $d=|\overrightarrow{P_0P_1}|$。平面 $\pi$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}(A,B,C)$，因为 $\overrightarrow{P_0P_1} /\!/ \boldsymbol{n}$，所以

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\delta \boldsymbol{n}^0. \tag{2.12}$$

(2.12)的两边用 $\boldsymbol{n}^0$ 作内积得：

$$\begin{aligned}\delta=\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\boldsymbol{n}^0&=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}[A(x_1-x_0)\\&\quad+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)]\\&=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\end{aligned} \tag{2.13}$$

于是得

$$d=|\overrightarrow{P_0P_1}|=|\delta|=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(2.12)中的 $\delta$ 称为点 $P_1$ 到平面 $\pi$ 的**离差**。(2.13)给出了求离差的公式。

## 2.3 三元一次不等式的几何意义

取定一个直角坐标系，坐标适合方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2.14}$$

的点在此方程表示的平面 $\pi$ 上。坐标适合不等式

$$Ax+By+Cz+D>0 \tag{2.15}$$

的点 $P(x,y,z)$，设 $P$ 到平面 $\pi$ 引的垂线的垂足为 $P_0$，由(2.13)和(2.12)知，$\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{n}(A,B,C)$ 同向。因此，所有坐标适合不等式(2.15)的点都在平面 $\pi$ 的同一侧($\boldsymbol{n}$ 所指的一侧)。同理，所有坐标适合不等式

$$Ax+By+Cz+D<0 \tag{2.16}$$

的点在平面 $\pi$ 的另一侧($-\boldsymbol{n}$ 所指的一侧)。

由上述知，平面 $\pi$ 把空间中的所有不在 $\pi$ 上的点分成了两部

分，第一部分中的点的坐标都适合(2.15)，第二部分中的点的坐标都适合(2.16)。换句话说，若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 不在平面 $\pi$ 上，则 $M_1$ 与 $M_2$ 位于平面 $\pi$ 同侧的充分必要条件是

$$F_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \text{ 与 } F_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

同号。这个结论在仿射坐标系中也成立（见习题2.2的第16题）。

## 2.4 两个平面的夹角

两个平面的夹角是指两个平面交成两个相邻的二面角中任一个。易知其中一个等于两个平面的法向量的夹角。

设在直角坐标系中，两平面 $\pi_i$ 的方程是

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, \quad i = 1,2.$$

则 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的一个夹角 $\theta$ 满足：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

从而得到两个平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 垂直的充分必要条件是：

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{2.17}$$

**例2.2** 设在直角坐标系中，平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的方程分别是

$$2x - y + 2z - 3 = 0 \text{ 和 } 3x + 2y - 6z - 1 = 0.$$

求由 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 构成的二面角的角平分面的方程，在此二面角内有点 $P_0(1,2,-3)$。

**解** 点 $M(x,y,z)$ 在所求的角平分面上的充分必要条件是：$M$ 到 $\pi_1$ 的距离 $d_1$ 等于 $M$ 到 $\pi_2$ 的距离 $d_2$，并且 $M$ 与 $P_0$ 或者都在 $\pi_i$ 的同侧 $(i=1,2)$，或者都在 $\pi_i$ 的异侧 $(i=1,2)$，或者 $M$ 在 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的交线上。因为 $P_0$ 的坐标适合：

$$2\times1 - 2 + 2\times(-3) - 3 = -9 < 0,$$

$$3\times1 + 2\times2 - 6\times(-3) - 1 = 24 > 0,$$

所以 $M$ 的坐标适合：

$$\frac{|2x - y + 2z - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|3x + 2y - 6z - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}},$$

并且适合：

$$\begin{cases}2x-y+2z-3\leqslant 0,\\3x+2y-6z-1\geqslant 0,\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}2x-y+2z-3\geqslant 0,\\3x+2y-6z-1\leqslant 0.\end{cases}$$

整理得 $23x-y-4z-24=0$。这就是所求二面角的角平分面的方程。

## 习 题 2.2

1．在直角坐标系中，求下列平面的方程。

(1) 过点 $P(-1,2,0)$，一个法向量 $\boldsymbol{n}(3,1,-2)$；

(2) 过点 $M_1(3,-1,4)$, $M_2(1,0,-3)$，垂直于平面 $2x+5y+z+1=0$。

2．证明：在直角坐标系中，通过点 $(x_0,y_0,z_0)$，并且与平面

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

都垂直的平面的方程为：

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & A_1 & A_2\\ y-y_0 & B_1 & B_2\\ z-z_0 & C_1 & C_2\end{vmatrix}=0.$$

3．在直角坐标系中，平面 $\pi$ 的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中所有系数都不为零。设此平面与三根坐标轴分别交于 $M_1$, $M_2$, $M_3$，求 $\triangle M_1M_2M_3$ 的面积和四面体 $OM_1M_2M_3$ 的体积。

4．在直角坐标系中，求点到平面的距离。

(1) 点 $(0,2,1)$ 到平面 $2x-3y+5z-1=0$；

(2) 点 $(-1,2,4)$ 到平面 $x-y+1=0$。

5．在直角坐标系中，求平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

与平面

$$Ax+By+Cz+D_1=0$$

之间的距离。

6. 在直角坐标系中，平面 $\pi$ 的方程为 $Ax+By+D=0$，求 $z$ 轴到平面 $\pi$ 的距离。

7. 在直角坐标系中，如果一个平面与三根坐标轴均相交，则三个截距倒数的平方和等于原点到此平面的距离的倒数的平方。

8. 在直角坐标系中，求与平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

平行且与它的距离为 $d$ 的平面的方程。

9. 在直角坐标系中，设

$$\pi_1:\ Ax+By+Cz+D_1=0 \text{ 与 } \pi_2:\ Ax+By+Cz+D_2=0$$

平行，求与 $\pi_1,\pi_2$ 等距离的点的轨迹。

10. 在直角坐标系中，求平面 $z=ax+by+c$ 与 $xOy$ 平面的夹角。

11. 给定直角坐标系，在平面束

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

中求出与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 垂直的平面的方程。

12. 在直角坐标系中，设 $\pi_i$ 的方程为

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2.$$

设 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 相交，求 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 交成的二面角的角平分面的方程。

*13. 求到两个给定平面的距离为定比的点的轨迹。

14. 证明：空间中满足条件 $|Ax+By+Cz+D|<d^2$ 的点分布在两个平行平面

$$Ax+By+Cz+D+d^2=0 \text{ 与 } Ax+By+Cz+D-d^2=0$$

之间。

*15. 证明：空间中满足条件 $|x|+|y|+|z|<a$ $(a>0)$ 的点位于中心在原点，顶点在坐标轴上，且顶点与中心的距离为 $a$ 的

八面体的内部。

*16.在仿射坐标系中，设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 都不在平面 $\pi$：$Ax+By+Cz+D=0$ 上，且 $M_1 \neq M_2$。证明：$M_1$ 与 $M_2$ 在平面 $\pi$ 的同侧的充分必要条件是：

$$F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D \text{ 与 } F_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$$

同号。

## §3 直线的方程，直线、平面间的相关位置

### 3.1 直线的方程

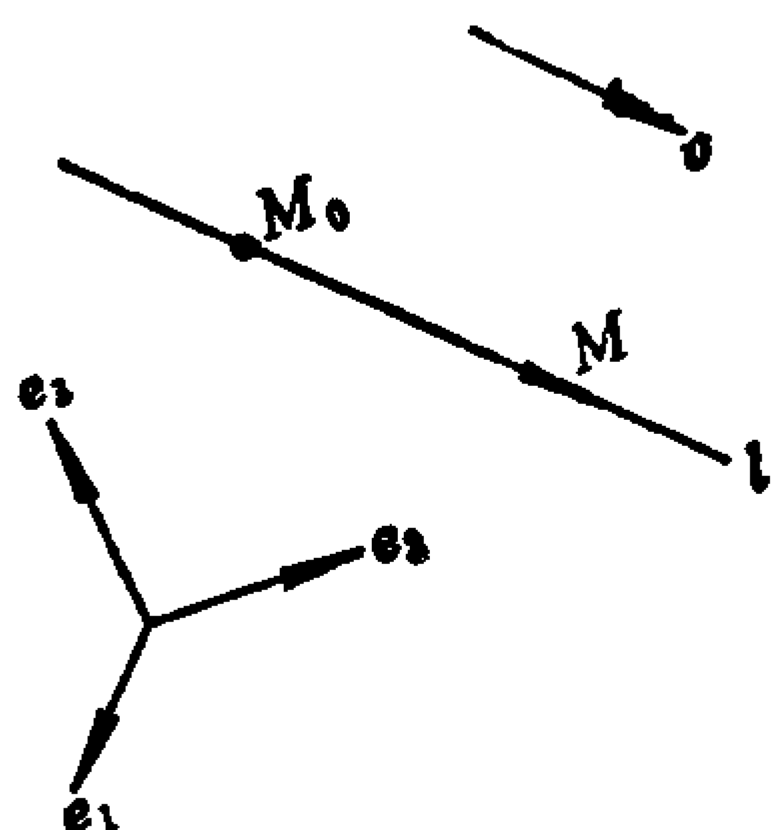



图 2.4

一个点和一个非零向量决定一条直线。取一个仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，非零向量 $\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$。现在来求过点 $M_0$ 且方向向量为 $\boldsymbol{v}$ 的直线 $l$ 的方程。

点 $M(x,y,z)$ 在直线 $l$ 上的充分必要条件是 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$，即 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v}$，$t$ 是实数。设 $M_0,M$ 的定位向量分别用 $\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}$ 表示，则由上式得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}. \qquad (2.18)$$

(2.18) 称为直线的**向量式参数方程**，$t$ 称为**参数**，它可以取任意实数，参数 $t$ 的几何意义是：点 $M$ 在直线 $l$ 上的仿射标架 $[M_0;\ \boldsymbol{v}]$ 中的坐标。

将(2.18)用坐标写出，得

$$\begin{cases} x=x_0+tX, \\ y=y_0+tY, \\ z=z_0+tZ. \end{cases} \qquad (2.19)$$

(2.19) 称为直线的**参数方程**，参数 $t$ 可取任意实数。

消去参数 $t$，因为 $\boldsymbol{v} \neq 0$，不妨设 $X \neq 0$，则得

$$t=\frac{x-x_0}{X},$$

如果 $Y\neq 0$，则得

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y},\tag{2.20}$$

如果 $Y=0$，则 $y-y_0=0$，于是如果规定分母为零时就表示分子也为零，则(2.20)式仍然成立。

同理可得

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{z-z_0}{Z},\tag{2.21}$$

因而有

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}.\tag{2.22}$$

(2.22) 称为直线 $l$ 的**标准方程**（或**点向式方程**），它实际上是两个方程 (2.20) 和 (2.21) 的联立方程组。标准方程中的 $(X,Y,Z)$ 称为直线 $l$ 的方向系数，它是 $l$ 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标。由于对任意非零实数 $k$，$k\boldsymbol{v}$ 也是 $l$ 的方向向量，所以 $(kX,kY,kZ)$ 也是 $l$ 的方向系数。

如果已知直线 $l$ 上两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为 $l$ 的一个方向向量，从而得 $l$ 的方程为：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.\tag{2.23}$$

(2.23) 称为直线 $l$ 的**两点式方程**。

任意一条直线可以看成是某两个相交平面的交线。设直线 $l$ 是相交平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的交线，$\pi_i$ 的方程为

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2,$$

它们的一次项系数不成比例。则

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\tag{2.24}$$

是直线 $l$ 的方程，称为 $l$ 的**普通方程**。

由直线 $l$ 的标准方程(2.22)可写出它的普通方程。若 $X \neq 0$，则(2.22)可写成：

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{X} = \dfrac{y-y_0}{Y}, \\ \dfrac{x-x_0}{X} = \dfrac{z-z_0}{Z}. \end{cases} \tag{2.25}$$

(2.25) 就是 $l$ 的普通方程，第一个方程表示平行于 $z$ 轴的平面，第二个方程表示平行于 $y$ 轴的平面。对于 $X=0$，而 $Y \neq 0$（或 $Z \neq 0$）的情况可类似讨论。

由直线 $l$ 的普通方程(2.24)可写出 $l$ 的标准方程。先找直线 $l$ 上的一个点 $M_0$，如果

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

则令 $z=0$，再去解 $x,y$ 的一次方程组，求得唯一的一个解 $x=x_0$，$y=y_0$。于是 $M_0(x_0,y_0,0)$在 $l$ 上。然后再找 $l$ 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$，因为 $\boldsymbol{v} /\!/ \pi_i$，$i=1,2$，所以有

$$\begin{cases} A_1X+B_1Y+C_1Z=0, \\ A_2X+B_2Y+C_2Z=0. \end{cases}$$

令

$$X = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad Y = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

则

$$A_iX+B_iY+C_iZ = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad i=1,2.$$

所以坐标为

$$\left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \tag{2.26}$$

的向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\pi_i(i=1,2)$平行。由于 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 方程中的一次项系数不成比例，所以(2.26)中的三个行列式不全为零（据定理1.4)。这说明 $\boldsymbol{v}\neq 0$，于是坐标为(2.26)的向量 $\boldsymbol{v}$ 就是 $l$ 的一个方向向量。有了 $l$ 上的一个点 $M_0$ 和它的一个方向向量 $\boldsymbol{v}$，就可以立即写出它的标准方程。

由于直角坐标系是特殊的仿射坐标系，所以上述一切结论在直角坐标系中都成立。利用右手直角坐标系的特殊性，在由直线的普通方程写出它的标准方程时，求 $l$ 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 可以更加直观，因为 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}_i$，其中 $\boldsymbol{n}_i$ 是 $\pi_i$ 的法向量，$i=1,2$；所以可以取 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，由于 $\boldsymbol{n}_i$ 的坐标是$(A_i,B_i,C_i)$，所以 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 的坐标就是(2.26)。

## 3.2 两条直线的相关位置

在仿射坐标系中，设直线 $l_i$ 过点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}_i(X_i,Y_i,Z_i)$，$i=1,2$。

$l_1$ 与 $l_2$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2$，但$\overrightarrow{M_1M_2}\not\parallel\boldsymbol{v}_1$。即存在实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{v}_2=\lambda\boldsymbol{v}_1$，但对一切实数 $\mu$ 都有 $\overrightarrow{M_1M_2}\neq\mu\boldsymbol{v}_1$。

$l_1$ 与 $l_2$ 重合的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2/\!/\overrightarrow{M_1M_2}$。即存在实数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\boldsymbol{v}_2=\lambda\boldsymbol{v}_1,\qquad \overrightarrow{M_1M_2}=\mu\boldsymbol{v}_1.$$

$l_1$ 与 $l_2$ 相交的充分必要条件是$\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 共面，且$\boldsymbol{v}_1\not\parallel\boldsymbol{v}_2$。即，

$$\Delta:=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & X_1 & X_2\\ y_2-y_1 & Y_1 & Y_2\\ z_2-z_1 & Z_1 & Z_2\end{vmatrix}=0, \qquad (2.27)$$

且对一切实数 $\lambda$，都有 $\boldsymbol{v}_2\neq\lambda\boldsymbol{v}_1$。

$l_1$ 与 $l_2$ 异面的充分必要条件是 $\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 不共面。即 $\Delta\neq 0$。

## 3.3 直线和平面的相关位置

在仿射坐标系中，设直线 $l$ 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，一个方向向量为 $\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$。设平面 $\pi$ 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$。

$l$ 与 $\pi$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}\parallel\pi$，且 $M_0$ 不在 $\pi$ 上，即

$$AX+BY+CZ=0 \quad 且 \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.$$

$l$ 在平面 $\pi$ 上的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}\parallel\pi$，且 $M_0$ 在 $\pi$ 上，即

$$AX+BY+CZ=0 \quad 且 \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

$l$ 与 $\pi$ 相交的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}\nparallel\pi$，即

$$AX+BY+CZ\neq 0.$$

此时，将 $l$ 的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+tX, \\ y=y_0+tY, \\ z=z_0+tZ \end{cases}$$

代入 $\pi$ 的方程中，得

$$A(x_0+tX)+B(y_0+tY)+C(z_0+tZ)+D=0,$$

解得

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ}, \tag{2.28}$$

再代回到 $l$ 的参数方程中，可求出 $l$ 与 $\pi$ 的交点的坐标。

## 3.4 例

**例2.3** 在直角坐标系中，直线 $l$ 的方程为

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-3},$$

求过 $l$ 并且平行于 $z$ 轴的平面 $\pi$ 的方程以及 $l$ 在 $xOy$ 平面上的投影的方程，并且画图。

**解** 因为 $l$ 的普通方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1},\\[2mm]\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-3},\end{cases}$$

第一个方程表示的平面就是经过 $l$ 且平行于 $z$ 轴的平面，因此所求平面 $\pi$ 的方程为

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{1},$$

即 $\quad x+2y-1=0.$

$l$ 在 $xOy$ 平面上的投影 $l_1$ 是平面 $\pi$ 与 $xOy$ 平面的交线，所以 $l_1$ 的方程是

$$\begin{cases}x+2y-1=0,\\z=0.\end{cases}$$

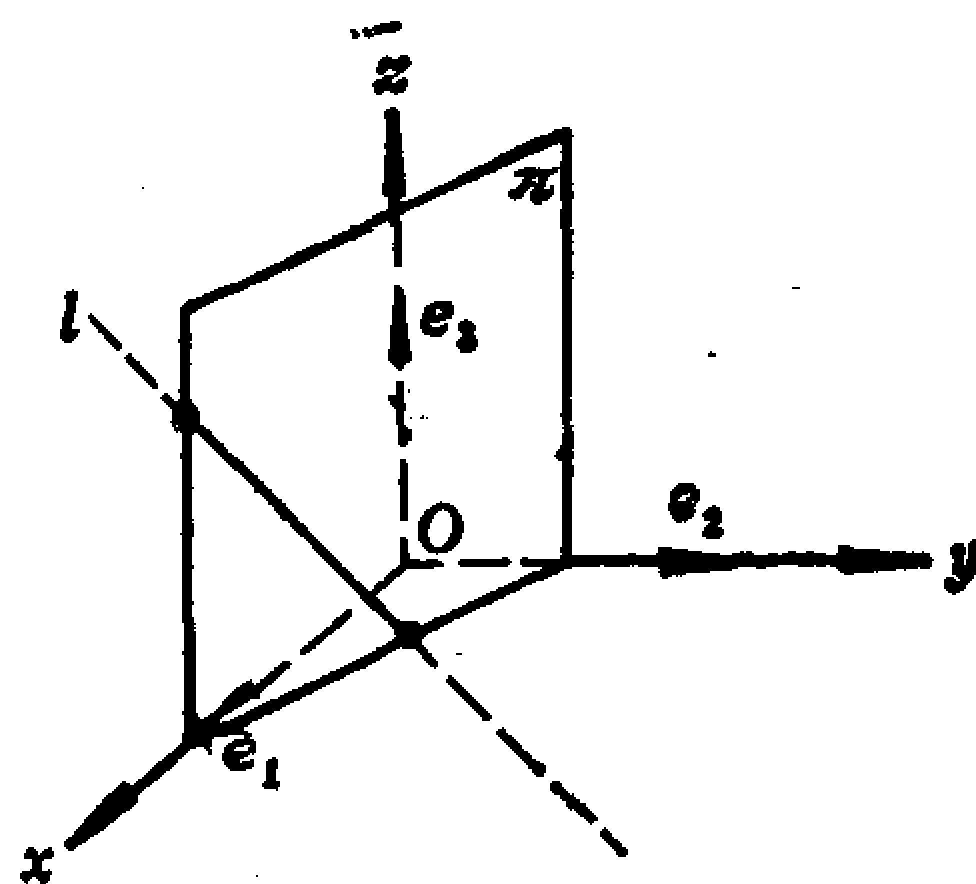


图 2.5

为了画平面 $\pi$，先求出它与 $x$ 轴的交点 $(1,0,0)$，它与 $y$ 轴交点 $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$。为了画直线 $l$，先求出 $l$ 与 $xOy$ 平面的交点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$，$l$ 与 $xOz$ 平面的交点 $(1,0,1)$。

**例2.4** 在仿射坐标系中，求过点 $M_0(0,0,-2)$，与平面

$$\pi_1:\quad 3x-y+2z-1=0$$

平行，且与直线

$$l_1:\quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

相交的直线 $l$ 的方程。

**解法一** 先求 $l$ 的一个方向向量 $v(X,Y,Z)$。因为 $l$ 过点 $M_0$，且 $l$ 与 $l_1$ 相交，所以有

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 4 & X \\ 3-0 & -2 & Y \\ 0-(-2) & 1 & Z \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$X + Y - 2Z = 0.$$

又因为 $l$ 与 $\pi_1$ 平行，所以有

$$3X - Y + 2Z = 0.$$

联立上述两个方程解得：

$$X = 0, \quad Y = 2Z.$$

令 $Z = 1$，得 $Y = 2$，所以 $l$ 的方程为

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}.$$

**解法二** $l$ 在过点 $M_0$，且与平面 $\pi_1$ 平行的平面 $\pi_2$ 上，设 $\pi_2$ 的方程为

$$3x - y + 2z + D = 0,$$

将 $M_0$ 的坐标代入，求得 $D = 4$。所以 $\pi_2$ 的方程为

$$3x - y + 2z + 4 = 0.$$

$l$ 又在过点 $M_0$ 以及直线 $l_1$ 的平面 $\pi_3$ 上，$\pi_3$ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-0 & 4 & 1-0 \\ y-0 & -2 & 3-0 \\ z-(-2) & 1 & 0-(-2) \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$x + y - 2z - 4 = 0.$$

因为 $l$ 是 $\pi_2$ 与 $\pi_3$ 的交线，所以 $l$ 的方程为

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 4 = 0, \\ x + y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

**解法三** 设 $l$ 与 $l_1$ 的交点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，因为 $M_2$ 在 $l_1$ 上，又 $\overrightarrow{M_0M_2} \parallel \pi_1$，所以有

$$\begin{cases} \dfrac{x_2-1}{4} = \dfrac{y_2-3}{-2} = \dfrac{z_2}{1}, \\ 3(x_2-0) - (y_2-0) + 2(z_2+2) = 0. \end{cases}$$

解之，得 $M_2$ 的坐标为$\left(0,\frac{7}{2},-\frac{1}{4}\right)$，因此 $l$ 的方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{\frac{7}{2}}=\frac{z+2}{-\frac{1}{4}+2},$$

即

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}.$$

## 习 题 2.3

1. 在给定仿射坐标系中，求下列直线的方程。

(1) 过点$(-2,3,5)$，方向系数为$(-1,3,4)$；

(2) 过点$(0,3,1)$和$(-1,2,7)$。

2. 在给定的直角坐标系中，求下列直线的方程。

(1) 过点$(-1,2,9)$，垂直于平面 $3x+2y-z-5=0$；

(2) 过点$(2,4,-1)$，与三根坐标轴夹角相等。

3. 将下列直线的普通方程化成标准方程。

(1) $\begin{cases}3x-y+2=0,\\4y+3z+1=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}y-1=0,\\z+2=0.\end{cases}$

4. 在给定的直角坐标系中，求下列直线在 $xOy$ 面上的投影，并画图。

(1) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$；　　(2) $\begin{cases}2x+3y+1=0,\\4x+3y+z-1=0.\end{cases}$

5. 判断下列各对直线的位置。

(1) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$，　　$\frac{x}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+5}{3}$；

(2) $\begin{cases}x+y+z=0,\\y+z+1=0;\end{cases}$　　$\begin{cases}x+z+1=0,\\x+y+1=0.\end{cases}$

6. 求直线与平面的交点。

(1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ 与 $3x+2y+z=0$；

(2) $\begin{cases} 2x+3y+z-1=0, \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ 与 $xOz$ 平面。

7. 求直线 $l$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

与 $z$ 轴相交的条件。

8. 在仿射坐标系中，求下列平面的方程。

(1) 过直线 $l_1$ 且平行于直线 $l_2$，其中 $l_1, l_2$ 的方程分别是：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

(2) 过直线 $l_1$：

$$\begin{cases} 2x-y-2z+1=0, \\ x+y+4z-2=0; \end{cases}$$

并且在 $y$ 轴和 $z$ 轴上有相同的非零截距。

(3) 经过两平面

$\pi_1$: $4x-y+3z-1=0$ 和 $\pi_2$: $x+5y-z+2=0$

的交线，并且经过点$(1,1,1)$。

9. 在给定的直角坐标系中，求下列平面方程。

(1) 与平面 $\pi_1$: $6x-2y+3z+15=0$ 平行，且这两个平面与点$(0,-2,-1)$等距；

(2) 经过 $z$ 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 交成 $60°$ 角；

(3) 经过点$(2,0,-3)$，且垂直于两平面

$\pi_1$: $x-2y+4z-7=0$ 和 $\pi_2$: $3x+5y-2z+1=0$。

10. 在给定的仿射坐标系中，求下列直线的方程。

(1) 过点$(1,0,-1)$，平行于直线 $l_1$：

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y=0; \end{cases}$$

(2) 过点(11,9,0)，与直线 $l_1$ 和 $l_2$ 均相交，其中 $l_1,l_2$ 的方程分别是：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3},\qquad \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2};$$

(3) 平行于向量(8,7,1)，且与直线 $l_1$ 和 $l_2$ 均相交，$l_1,l_2$ 的方程分别是：

$$\frac{x+13}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1},\qquad \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}.$$

11． 在给定的直角坐标系中，求下列直线的方程。

(1) 过点(2,-1,3)，与直线 $l_1$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{2}$$

相交且垂直(简称正交)；

(2) 过点(4,2,-3)，平行于平面 $x+y+z-10=0$，且与直线 $l_1$

$$\begin{cases} x+2y-z-5=0, \\ z-10=0 \end{cases}$$

正交；

(3) 从点(2,-3,-1)引向直线

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$$

的垂线；

(4) 经过点 $M_0$，且与直线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{v}$ 正交。

12． 在△$ABC$ 中，设 $P,Q,R$ 分别是直线 $AB,BC,CA$ 上的点，并且

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB},\quad \overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{QC},\quad \overrightarrow{CR}=\nu\overrightarrow{RA}.$$

证明：$AQ,BR,CP$ 共点的充分必要条件是 $\lambda\mu\nu=1$(注：若 $AQ$,

$BR, CP$ 彼此平行，则也认为它们有一个公共点。这在第七章 §1 将详细讲)。

13. 用坐标法证明契维定理：若三角形的三边依次被分割成

$$\lambda:\mu, \nu:\lambda, \mu:\nu,$$

其中 $\lambda, \mu, \nu$ 均为正实数，则此三角形的顶点与对边分点的连线交于一点。

14. 求出直线 $l$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

和平面 $\pi$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

平行或 $l$ 在 $\pi$ 上的条件。

*15. 证明：如果直线 $l_1$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

与直线 $l_2$

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

相交，那末

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

16. 证明：任何与直线 $l_1$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

和直线 $l_2$

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

都相交的直线 $l$ 的方程为：

$$\begin{cases} \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \\ \lambda'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \mu'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda,\mu$ 是不全为零的实数，$\lambda',\mu'$ 也是不全为零的实数。

.17. 证明：到三角形的三个顶点等距离的点的几何轨迹是一条直线。

*18. 在直角坐标系中，给定点 $A(1,0,3)$和 $B(0,2,5)$，直线 $l$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3},$$

设 $A',B'$ 各为 $A,B$ 在 $l$ 上的垂足，求$|A'B'|$以及 $A',B'$ 的坐标。

*19. 在仿射坐标系中，求出过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，并且与平面

$$\pi_i:\ A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0,\quad i = 1,2$$

都平行的直线的方程。

## §4 点、直线和平面之间的度量关系

本节均在右手直角坐标系中讨论。

### 4.1 点到直线的距离

设直线 $\boldsymbol{l}$ 过点 $M_0$，方向向量为 $\boldsymbol{v}$。由图2.6看出，点$M$到直线 $l$ 的距离 $d$ 是以 $\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}$ 为邻边的平行四边形的底边 $\boldsymbol{v}$ 上的高，因此有

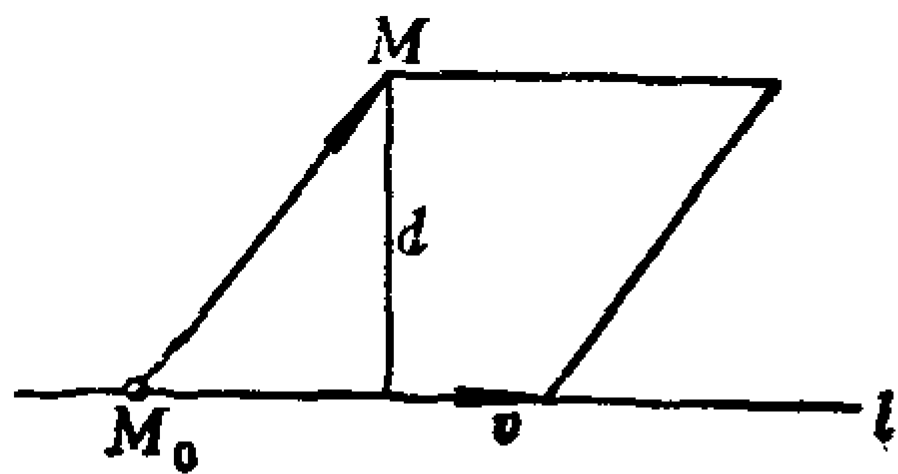



图 2.6

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}. \tag{2.29}$$

### 4.2 两条直线之间的距离

**定义2.1** 两条直线上的点之间的最短距离称为**这两条直线间的距离。**

如果 $l_1 /\!/ l_2$，则 $l_1$ 上的一个点到 $l_2$ 的距离就是 $l_1$ 与 $l_2$ 间的距离；如果 $l_1$ 与 $l_2$ 相交或重合，则 $l_1$ 与 $l_2$ 之间的距离为零。

下设 $l_1$ 与 $l_2$ 异面，$l_i$ 过点 $M_i$，方向向量为 $\boldsymbol{v}_i$，$i=1,2$，且 $\boldsymbol{v}_1 \not\parallel \boldsymbol{v}_2$，$M_1 \neq M_2$。

**定义2.2** 分别与两条异面直线 $l_1, l_2$ 垂直相交（即正交）的直线 $l$ 称为 $l_1$ 与 $l_2$ 的**公垂线**，两垂足的连线段称为**公垂线段。**

**命题2.4** 两条异面直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的公垂线存在且唯一。

**证明** 存在性。因为 $\boldsymbol{v}_1 \not\parallel \boldsymbol{v}_2$，所以 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 不共线。于是 $M_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 决定一个平面 $\pi_1$。同理，$M_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 决定一个平面 $\pi_2$。因为 $\boldsymbol{v}_1 \not\parallel \boldsymbol{v}_2$，根据习题1.5第11题我们知，$\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$ 与 $\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$ 不共线，而它们分别是 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的法向量，于是 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 必相交，设交线为 $l$。$l$ 的方向向量为：

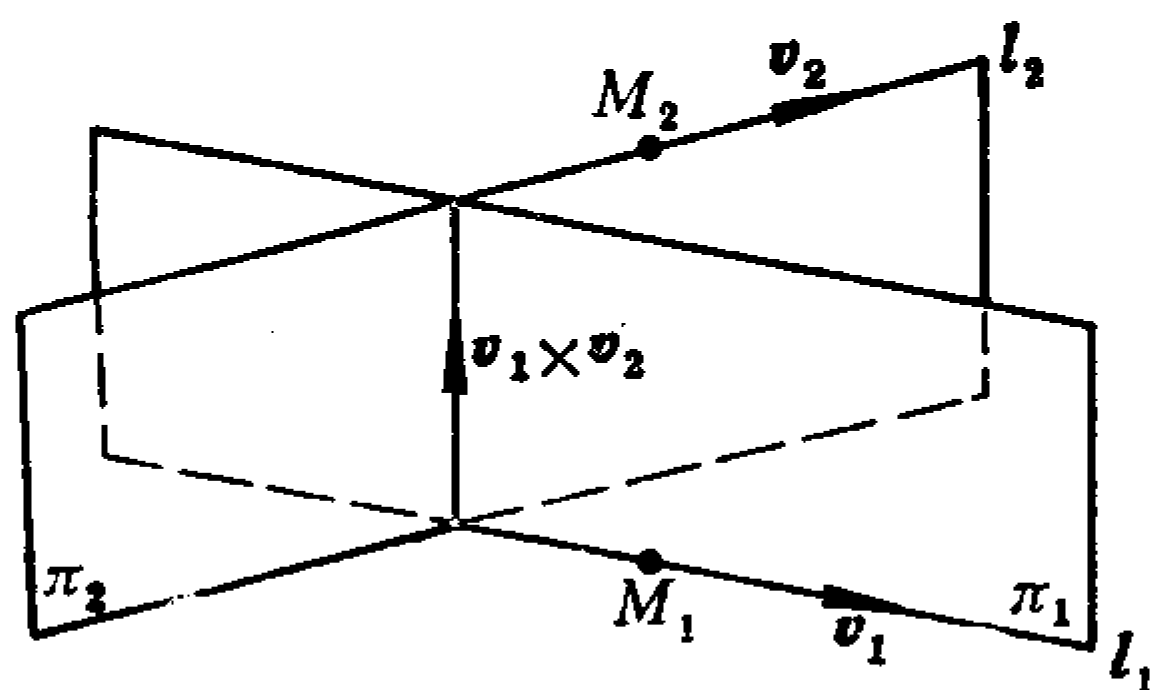



图 2.7

$$[\boldsymbol{v}_1\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)]\times[\boldsymbol{v}_2\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)],$$

据习题1.5第10题知，这个向量等于 $|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|^2(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$，因此，$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 就是 $l$ 的一个方向向量。由于

$$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_i,\quad i=1,2,$$

所以

$$l \perp l_i,\quad i=1,2.$$

因为 $l$ 与 $l_i$ 都在 $\pi_i$ 内，且 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2 \not\parallel \boldsymbol{v}_i$，所以 $l$ 与 $l_i$ 相交，$i=1,$

2. 这表明 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的交线 $l$ 就是 $l_1$ 与 $l_2$ 的公垂线。

唯一性。假如 $l'$ 也是 $l_1$ 与 $l_2$ 的公垂线，则 $l'$ 的方向向量垂直于 $\boldsymbol{v}_i$，$i=1,2$，从而 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 就是 $l'$ 的一个方向向量。因为 $l'$ 在由 $l_i$ 和 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 决定的平面 $\pi_i$ 内，$i=1,2$，所以 $l'$ 是 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的交线，于是 $l'$ 与 $l$ 重合。

**命题2.5** 两条异面直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的公垂线段的长就是 $l_1$ 与 $l_2$ 之间的距离。

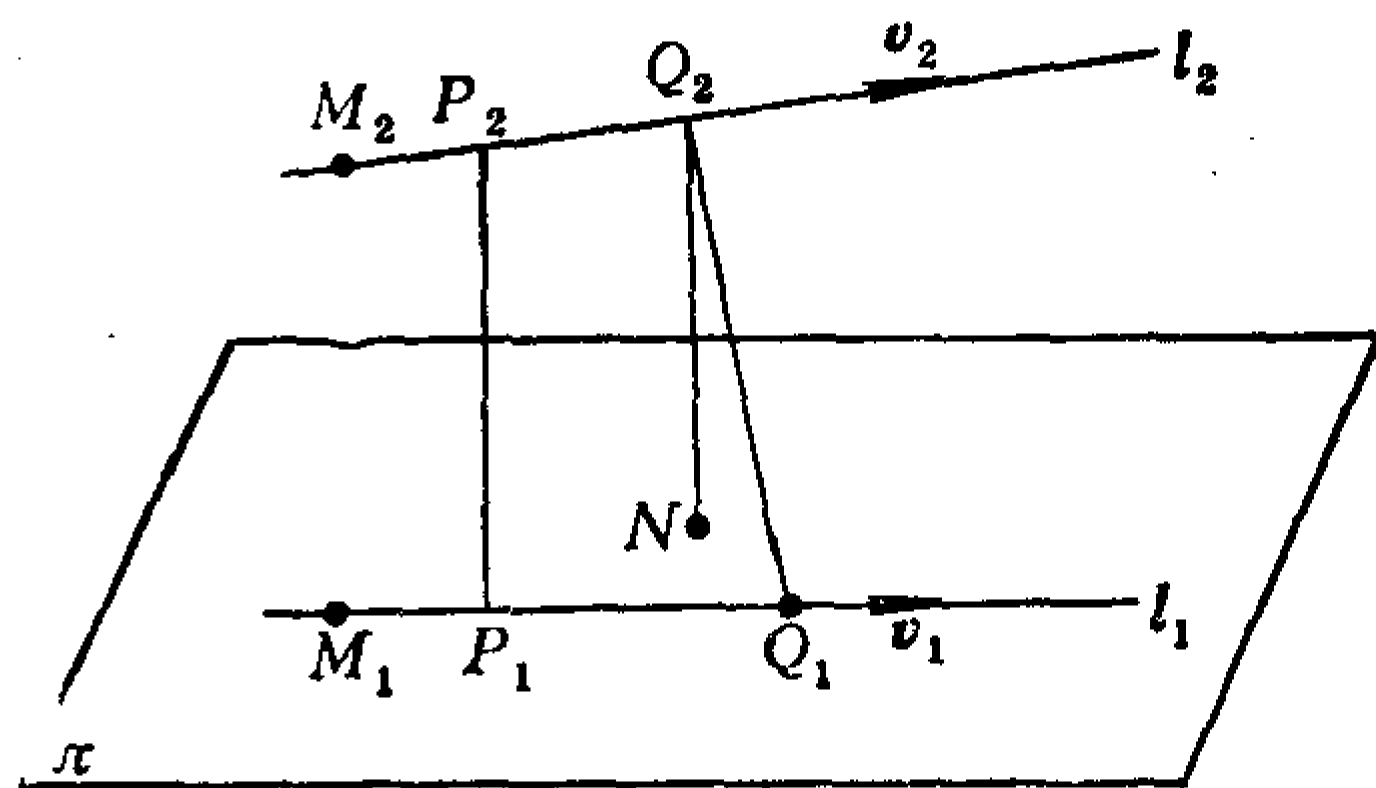



图 2.8

**证明** 设 $P_1P_2$ 是 $l_1$ 与 $l_2$ 的公垂线段。在 $l_i$ 上任取一点 $Q_i$，$i=1,2$。作出由 $M_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 决定的平面 $\pi$，于是公垂线 $P_1P_2\perp\pi$。由 $Q_2$ 作 $\pi$ 的垂线，设垂足为 $N$，因为 $l_2/\!/\pi$，所以 $|P_1P_2|=|Q_2N|$。于是

$$|Q_2Q_1|\geqslant|Q_2N|=|P_1P_2|.$$

所以 $|P_1P_2|$ 是 $l_1$ 与 $l_2$ 上的点之间的最短距离。

**命题2.6** 设两条异面直线 $l_1,l_2$ 分别过点 $M_1,M_2$，方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，则 $l_1$ 与 $l_2$ 之间的距离为：

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}. \tag{2.30}$$

**证明** 设 $l_1$ 与 $l_2$ 的公垂线段为 $P_1P_2$，因为公垂线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$，所以 $\overrightarrow{P_1P_2}/\!/\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$。记 $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)^0$。则

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{e}|=|(\overrightarrow{P_1M_1}+\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2P_2})\cdot\boldsymbol{e}|$$

$$=|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{e}|$$

$$=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\frac{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}\right|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

公式(2.30)的几何意义是：两条异面直线 $l_1$ 与$l_2$ 之间的距离 $d$ 等于以$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 为棱的平行六面体的体积除以以 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 为邻边的平行四边形的面积。

### 4.3 两条直线的夹角，直线和平面的夹角

**定义2.3** 两条直线的夹角规定为它们的方向向量的夹角或它的补角。

**定义2.4** 直线 $l$ 与平面 $\pi$($l$ 不垂直于 $\pi$)的夹角规定为 $l$ 与它在 $\pi$ 上的垂直投影所夹的锐角 $\theta$，当 $l\perp\pi$ 时，$l$ 与 $\pi$ 的夹角规定为$\frac{\pi}{2}$。

设平面 $\pi$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，$l$ 的方向向量为 $\boldsymbol{v}$。则从图 2.9看出：

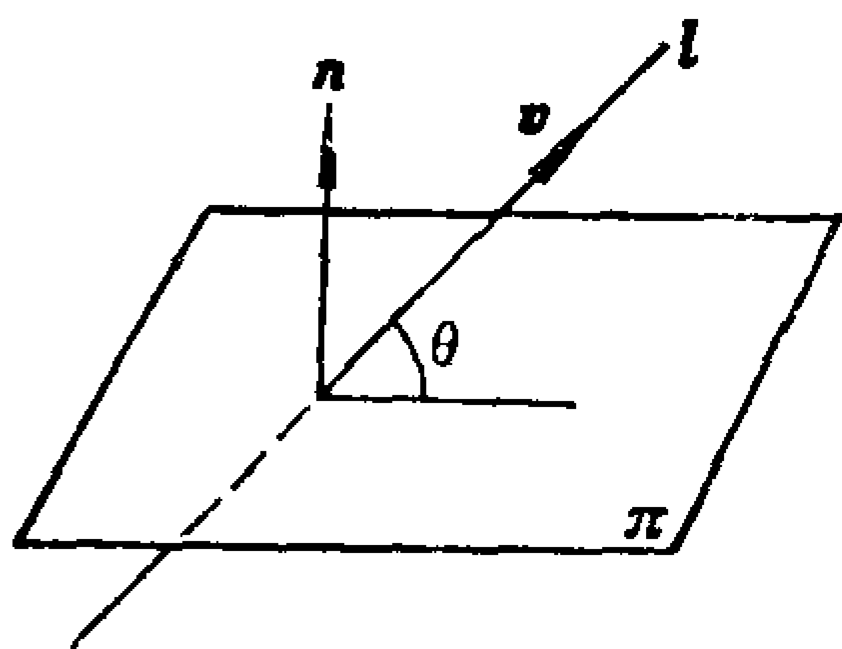



图 2.9

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle,$$

或者

$$\theta=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle-\frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle|.$$

### 习 题 2.4

1. 求下列点到直线的距离。

(1) 点$(-1,-3,5)$，直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-3};$$

（2） 点(1,0,2)，直线

$$\begin{cases} 2x-y-2z+1=0, \\ x+y+4z-2=0. \end{cases}$$

2． 求下列各对直线之间的距离。

（1） $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{2}$ 与 $\frac{x}{3}=\frac{y-6}{-9}=\frac{z+5}{-6}$；

（2） $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ 与 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$；

（3） $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x+y=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-2y+3z-6=0, \\ 2x-y+3z-6=0. \end{cases}$

3． 求下列各对直线的公垂线的方程。

（1） $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$ 与 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$；

（2） $\begin{cases} x+y-1=0, \\ z=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-z+1=0, \\ 2y+z-2=0. \end{cases}$

4． 求下列各对直线的夹角。

（1） $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{2}$ 与 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}$；

（2） $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x+y+2z+1=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x+y+1=0, \\ y+3z+2=0. \end{cases}$

5． 求下列直线与平面的夹角。

（1） 直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$，平面 $x-2y+4z-1=0$；

（2） 直线$\begin{cases} x-y-z+2=0, \\ 2x-3y+3=0, \end{cases}$ 平面 $2x-z+1=0$.

6. 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与坐标轴的夹角，在怎样的条件下，此平面与三根坐标轴成等角。

7. 设异面直线 $l_1,l_2$ 的方程分别为：

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}, \qquad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2},$$

求与 $l_1,l_2$ 等距离的平面的方程。

8. 已知两条异面直线 $l_1$ 和 $l_2$，证明：连接 $l_1$ 上任一点和 $l_2$ 上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面。

9. 在直角坐标系中，点 $P$ 不在坐标平面上，从 $P$ 点到 $xOz$，$xOy$ 平面分别作垂线，垂足为 $M$ 和 $N$。设直线 $OP$ 与平面 $OMN$，$xOy,yOz,zOx$ 的夹角分别为 $\theta,\alpha,\beta,\gamma$。则

$$\csc^2\theta=\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma.$$

# 第三章　常见曲面

本章将介绍一些常见曲面，一方面了解如何利用曲面的几何特性建立它的方程，另一方面熟悉如何利用方程研究曲面的几何性质。本章的讨论均在右手直角坐标系中进行。

## §1　球面和旋转面

### 1.1　球面的普通方程

我们来求球心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 $R$ 的**球面**的方程。点 $M(x,y,z)$ 在这个球面上的充分必要条件是 $|\overrightarrow{M_0M}|=R$，即，

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{3.1}$$

展开得

$$x^2+y^2+z^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0, \tag{3.2}$$

其中，$b_1=-x_0$，$b_2=-y_0$，$b_3=-z_0$，$c=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$。

(3.1)或(3.2)就是所求球面方程，它是一个三元二次方程，沒有交叉项（指 $xy,xz,yz$ 项），平方项的系数相同。反之，任一形如(3.2)的方程经过配方后可写成：

$$(x+b_1)^2+(y+b_2)^2+(z+b_3)^2+c-b_1^2-b_2^2-b_3^2=0,$$

当 $b_1^2+b_2^2+b_3^2>c$ 时，它表示一个球心在 $(-b_1,-b_2,-b_3)$，半径为 $\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2-c}$ 的球面；当 $b_1^2+b_2^2+b_3^2=c$ 时，它表示一个点 $(-b_1,-b_2,-b_3)$；当 $b_1^2+b_2^2+b_3^2<c$ 时，它沒有轨迹（或者说它表示一个虚球面），

## 1.2 球面的参数方程，点的球面坐标

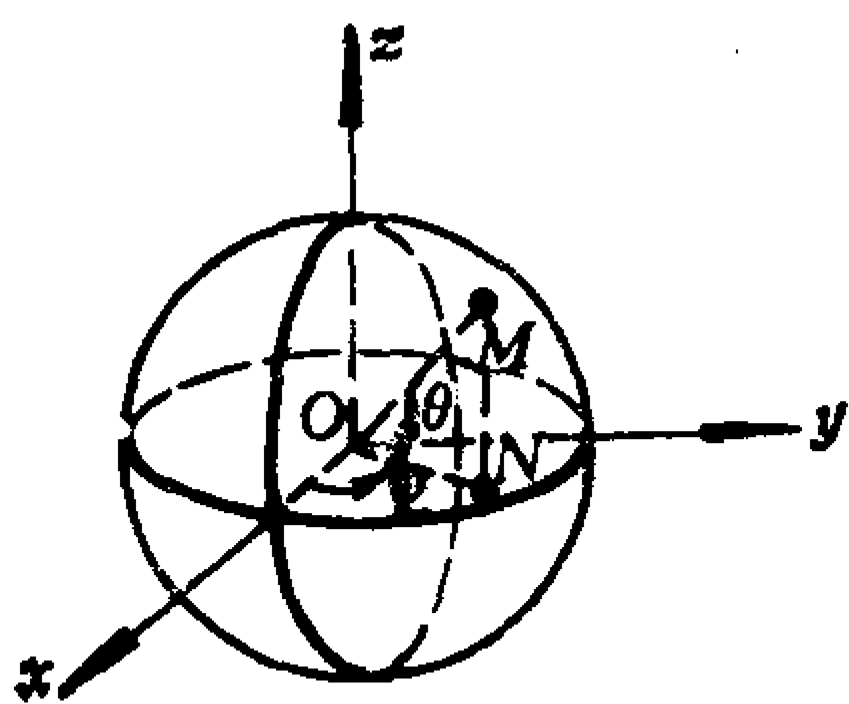


图 3.1

如果球心在原点，半径为 $R$，在球面上任取一点 $M(x,y,z)$，从 $M$ 作 $xOy$ 面的垂线，垂足为 $N$，连 $OM$，$ON$。设 $x$ 轴到 $\overrightarrow{ON}$ 的角度为 $\varphi$，$\overrightarrow{ON}$ 到 $\overrightarrow{OM}$ 的角度为 $\theta$（$M$ 在 $xOy$ 面上方时，$\theta$ 为正，反之为负），则有

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\ \cos\varphi, & 0\leqslant\varphi<2\pi, \\ y = R\cos\theta\ \sin\varphi, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}. \\ z = R\sin\theta. & \end{cases} \tag{3.3}$$

(3.3)称为球心在原点，半径为 $R$ 的球面的**参数方程**，有两个参数 $\varphi,\theta$，其中 $\varphi$ 称为**经度**，$\theta$ 称为**纬度**。球面上的每一个点(除去它与 $z$ 轴的交点)对应唯一的一对实数 $(\theta,\varphi)$，因此$(\theta,\varphi)$ 称为球面上点的**曲纹坐标**。

因为空间中任一点 $M(x,y,z)$ 必在以原点为球心，以 $R=|\overrightarrow{OM}|$ 为半径的球面上，而球面上的点（除去它与 $z$ 轴的交点外）又由它的曲纹坐标$(\theta,\varphi)$唯一确定，因此，除去 $z$ 轴外，空间中的点 $M$ 由有序三元实数组$(R,\theta,\varphi)$唯一确定。我们把 $(R,\theta,\varphi)$ 称为空间中点 $M$ 的**球面坐标**（或**空间极坐标**），其中 $R\geqslant0$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqslant\varphi<2\pi$。点 $M$ 的球面坐标 $(R,\theta,\varphi)$ 与 $M$ 的直角坐标$(x,y,z)$的关系为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi, & R\geqslant0, \\ y = R\cos\theta\sin\varphi, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ z = R\sin\theta, & 0\leqslant\varphi<2\pi, \end{cases} \tag{3.4}$$

## 1.3 曲面和曲线的普通方程、参数方程

从球面的方程(3.2)和球面的参数方程 (3.3) 看到，一般来说，曲面的普通方程是一个三元方程 $F(x,y,z)=0$。曲面的参数方程是含两个参数的方程：

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad a \leqslant u \leqslant b, \ c \leqslant v \leqslant d, \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{3.5}$$

其中，对于$(u,v)$的每一对值，由(3.5)确定的点$(x,y,z)$ 在此曲面上；而此曲面上任一点的坐标都可由 $(u,v)$ 的某一对值通过(3.5)表示。于是通过曲面的参数方程(3.5)，曲面上的点 (可能要除去个别点)便可以由数对$(u,v)$来确定，因此 $(u,v)$ 称为曲面上点的**曲纹坐标**。

空间中曲线的普通方程是两个三元方程的联立：

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

即空间中曲线可以看成是两个曲面的交线。曲线的参数方程是含有一个参数的方程：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \\ z = z(t), \end{cases} \tag{3.6}$$

其中，对于 $t(a\leqslant t\leqslant b)$的每一个值，由(3.6)确定的点$(x,y,z)$在此曲线上，而此曲线上任一点的坐标都可由 $t$ 的某个值通过(3.6)表示。

例如，球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $xOy$ 平面相交所得的圆的普通方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

而这个圆的参数方程是：

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \\ z = 0, \end{cases}$$

## 1.4 旋 转 面

球面可以看成是一个半圆绕它的直径旋转一周所形成的曲面。现在来研究更一般的情形。

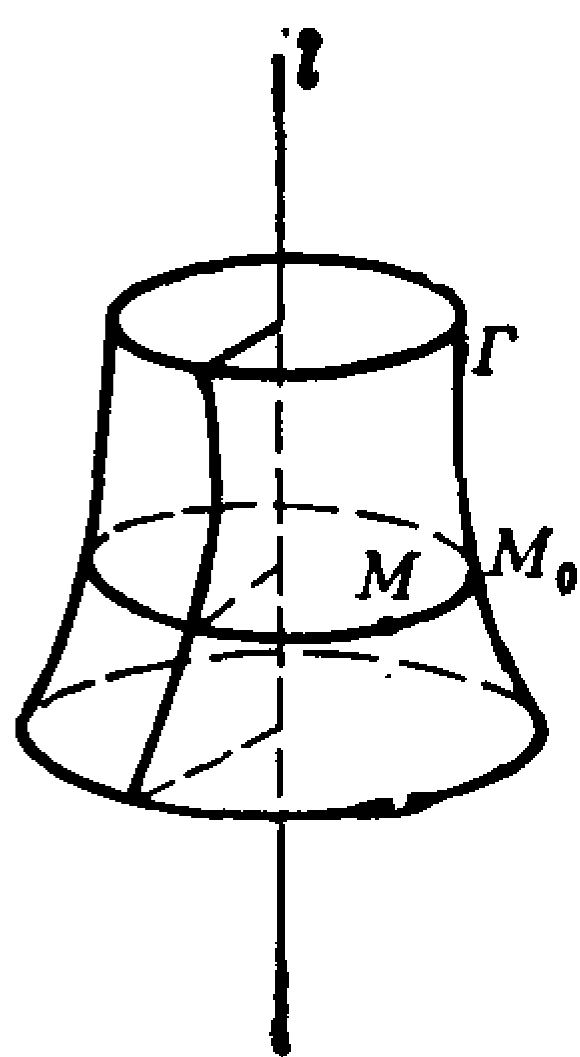



图 3.2

**定义3.1** 一条曲线 $\Gamma$ 绕一条直线 $l$ 旋转所得的曲面称为**旋转面**。$l$ 称为**轴**，$\Gamma$ 称为**母线**。

母线 $\Gamma$ 上每个点 $M_0$ 绕 $l$ 旋转得到一个圆，称为**纬圆**，纬圆与轴垂直。过 $l$ 的半平面与旋转面的交线称为**经线**（或**子午线**）。经线可以作为母线，但母线不一定是经线。

已知轴 $l$ 过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}(l, m, n)$，母线 $\Gamma$ 的方程为：

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

我们来求旋转面的方程。

点 $M(x, y_0, z)$ 在旋转面上的充分必要条件是 $M$ 在经过母线 $\Gamma$ 上某一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的纬圆上（如图3.2）。即，有母线 $\Gamma$ 上的一点 $M_0$ 使得 $M$ 和 $M_0$ 到轴 $l$ 的距离相等（或到轴上一点 $M_1$ 的距离相等）；并且 $\overrightarrow{M_0M} \perp l$。因此，有

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ |\overrightarrow{MM_1} \times \boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{v}|, \\ l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

从这个方程组中消去参数 $x_0, y_0, z_0$，就得到 $x, y, z$ 的方程，它就

是所求旋转面的方程。

现在设旋转轴为 $z$ 轴，母线 $\Gamma$ 在 $yOz$ 平面上，其方程为

$$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

则点 $M(x,y,z)$在旋转面上的充分必要条件是：

$$\begin{cases} f(y_0,z_0)=0, \\ x_0=0, \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2, \\ 1\cdot(z-z_0)=0. \end{cases}$$

消去参数 $x_0,y_0,z_0$，得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{3.7}$$

(3.7)就是所求旋转面的方程。由此看出，为了得到 $yOz$ 平面上的曲线 $\Gamma$ 绕 $z$ 轴旋转所得的旋转面方程，只要将母线 $\Gamma$ 在 $yOz$ 平面上的方程中 $y$ 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$z$ 不动。坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转所得旋转面方程都有类似的规律。

**例3.1** 母线 $\Gamma$

$$\begin{cases} y^2=2pz, \\ x=0 \end{cases}$$

绕 $z$ 轴旋转所得旋转面方程为

$$x^2+y^2=2pz,$$

这个曲面称为**旋转抛物面**(如图3.3)。

**例3.2** 母线 $\Gamma$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

绕 $x$ 轴旋转所得曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

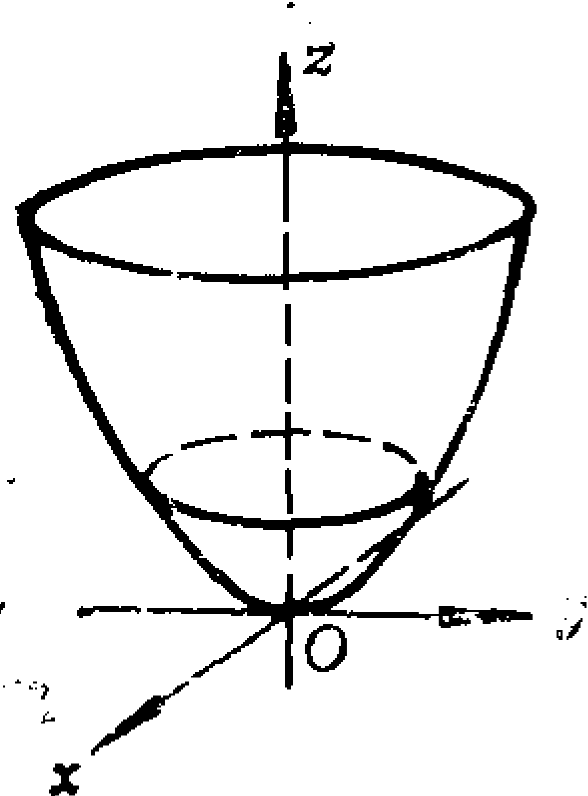


图 3.3

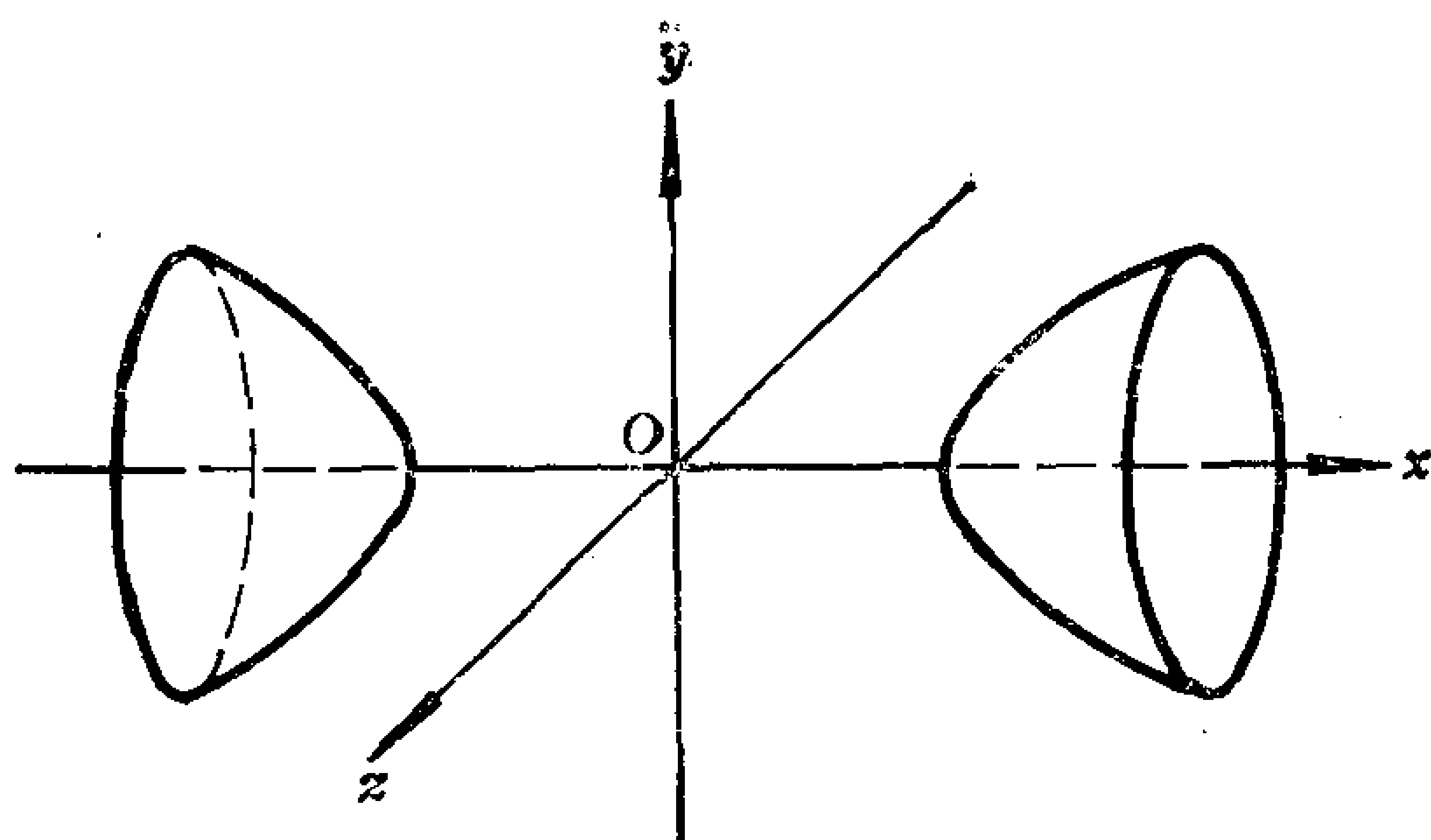


图 3.4

这个曲面称为**旋转双叶双曲面**(如图3.4). $\Gamma$绕 $y$ 轴旋转所得曲面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

这个曲面称为**旋转单叶双曲面**(如图3.5).

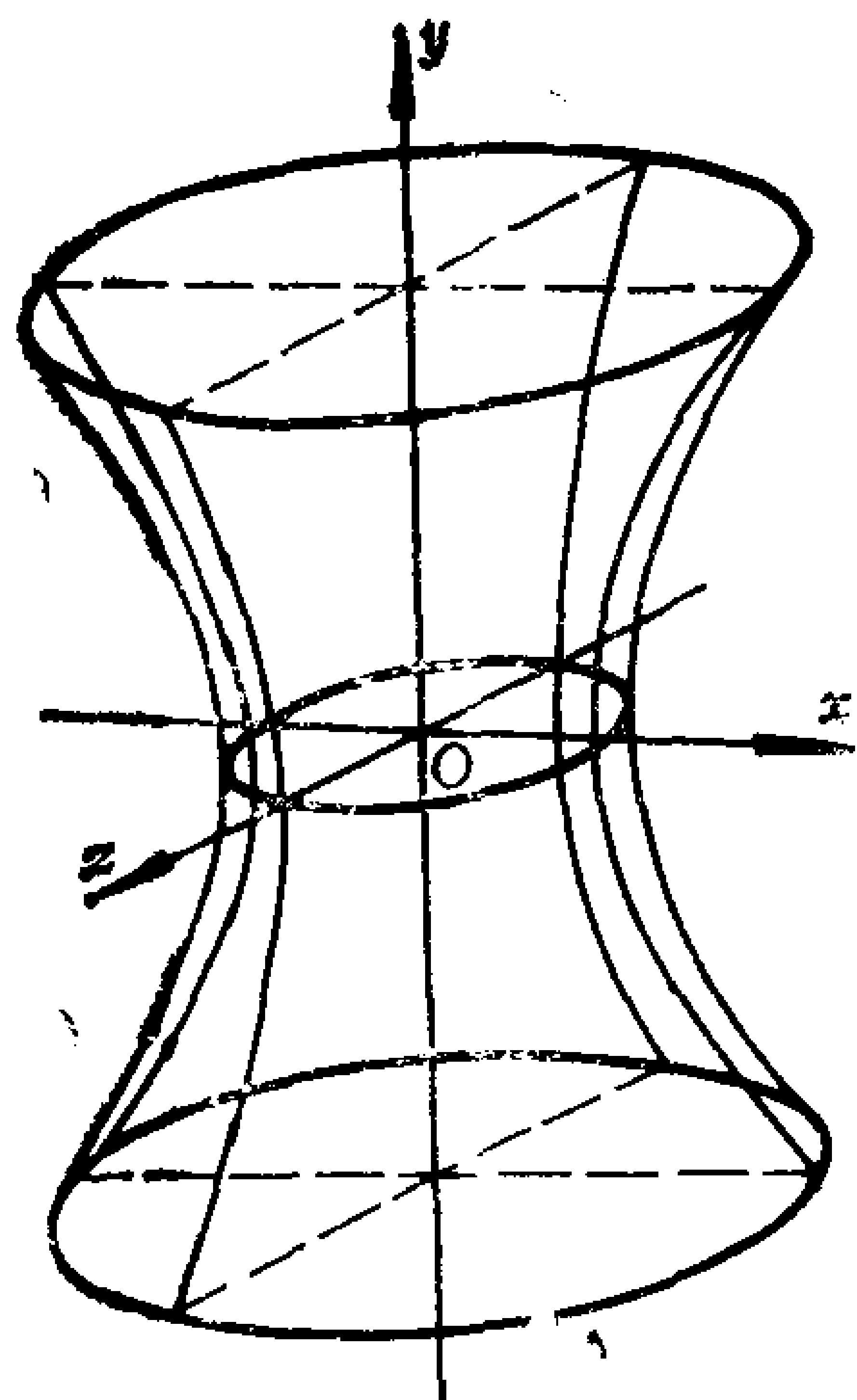


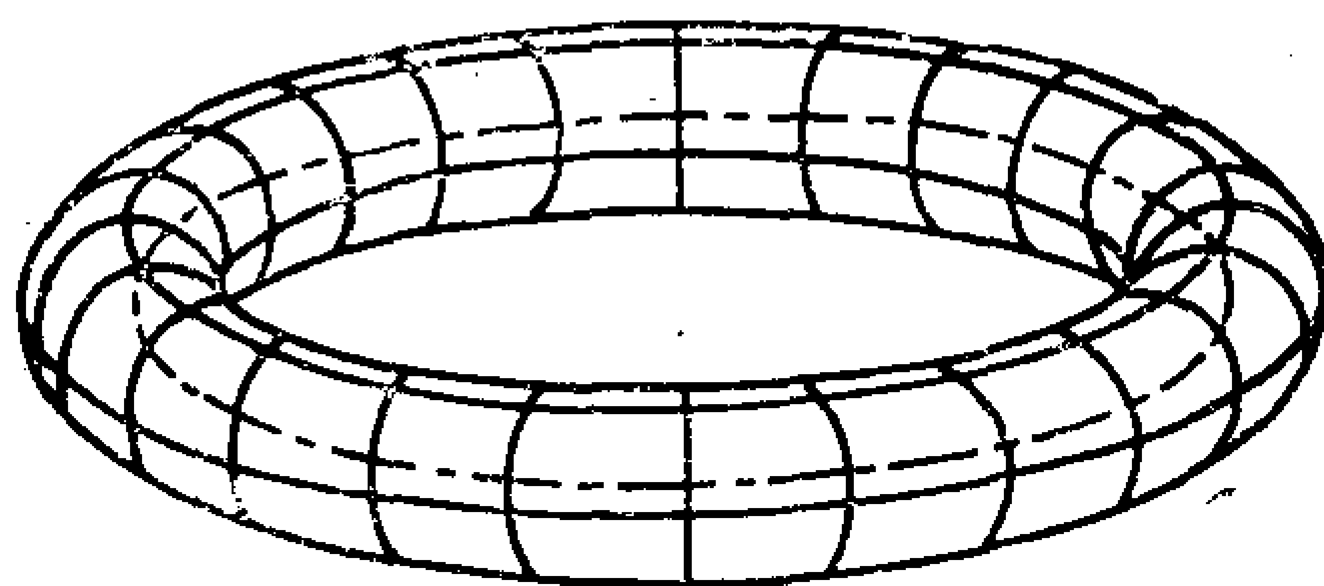
图 3.5

**例3.3** 圆

$$\begin{cases}(x-a)^2+z^2=r^2,\\ y=0\end{cases}\quad(0<r<a)$$

绕 $z$ 轴旋转所得曲面为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2,$$


图 3.6

即
$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

这个曲面称为**环面**(如图3.6).

**例3.4** 设 $l_1$ 和 $l_2$ 是两条异面直线，它们不垂直。求 $l_2$ 绕 $l_1$ 旋转所得曲面的方程。

**解** 设 $l_1$ 和 $l_2$ 的距离为 $a$。以 $l_1$ 为 $z$ 轴，以 $l_1$ 和 $l_2$ 的公垂线为 $x$ 轴，且使 $l_2$ 与 $x$ 轴的交点为 $(a,0,0)$，建立一个右手直角坐标系。设 $l_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{v}(l,m,n)$，因为 $l_2$ 与 $x$ 轴垂直，所以 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1=0$，得 $l=0$。因为 $l_2$ 与 $l_1$ 异面，所以 $\boldsymbol{v}\not\parallel\boldsymbol{e}_3$，于是 $m\neq0$。因此可设 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为 $(0,1,b)$。因为 $l_1$ 与 $l_2$ 不垂直，所以 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3\neq0$，于是 $b\neq0$。因此，$l_2$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a,\\ y=t, & -\infty<t<+\infty.\\ z=bt,\end{cases}$$

点 $M$ 在旋转面上的充分必要条件是

$$\begin{cases}x_0=a,\\ y_0=t,\\ z_0=bt,\\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2,\\ 1\cdot(z-z_0)=0.\end{cases}$$

消去参数 $x_0,y_0,z_0,t$，得

$$x^2+y^2=a^2+\frac{z^2}{b^2},$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2b^2}=1.$$

这是一个旋转单叶双曲面。

## 习 题 3.1

1. 求下列球面的中心和半径。

(1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

(2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$.

2. 求下列球面的方程。

(1) 以点 $A(1,0,3)$,$B(2,-1,4)$的连线段为直径；

(2) 过点$(1,-1,1)$,$(1,2,-1)$,$(2,3,0)$和坐标原点；

(3) 过点$(1,2,5)$，与三个坐标平面相切；

(4) 过点$(2,-4,3)$，且包含圆：

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ z=0. \end{cases}$$

3. 过球面上一点与此点所作半径相垂直的平面叫做切面。给定球面

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-20=0,$$

求过这球面上一点$(2,4,2)$的切面方程。

4. 平面 $Ax+By+Cz+D=0$($A>0$；$B,C,D<0$) 与三个坐标平面组成一个四面体，求内切于这个四面体的球面方程。

5. 求下列圆的中心和半径。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0, \\ 2x+y+z+1=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$

6. 求过三点$(3,0,0)$,$(0,2,0)$,$(0,0,1)$的圆的方程。

7. 证明曲线

$$\begin{cases} x=3\sin t, \\ y=4\sin t, \\ z=5\cos t \end{cases}$$

是一个圆，并求该圆的中心及半径。

*8. 证明：曲线

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2+t^4}, \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}, \\ z=\dfrac{t^3}{1+t^2+t^4} \end{cases}$$

$(-\infty<t<+\infty)$表示一条球面曲线，并且求它所在的球面。

9. 求旋转面的方程。

(1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$旋转；

(2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$旋转；

(3) $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$ 绕 $z$ 轴旋转；

(4) $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-3}$ 绕 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$旋转；

(5) $\begin{cases} z=ax+b, \\ z=cy+d \end{cases}$ $(a,b,c,d\neq 0)$ 绕 $z$ 轴旋转；

(6) $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $x$ 轴旋转；

(7) $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转；

(8) $\begin{cases} xy=a^2, \\ z=0 \end{cases}$ 绕这曲线的渐近线旋转；

(9) $\begin{cases} y=x^3, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转；

(10) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=x^2 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转。

*10. 证明：$z=\frac{1}{x^2+y^2}$表示一个旋转面，并且求它的母线和转轴。

11. 适当选取坐标系，求下列轨迹的方程。

(1) 到两定点距离之比等于常数的点的轨迹；

(2) 到两定点距离之和等于常数的点的轨迹；

(3) 到定平面和定点等距离的点的轨迹。

## §2　柱面和锥面

### 2.1　柱面方程的建立

**定义3.2**　一条直线 $l$ 沿着一条空间曲线 $C$ 平行移动时所形成的曲面称为**柱面**。$l$ 称为**母线**，$C$ 称为**准线**。

按定义，平面也是柱面。

对于一个柱面，它的准线和母线都不唯一，但母线方向唯一(除去平面外)。与每一条母线都相交的曲线均可作为准线。

设一个柱面的母线方向为 $v(l,m,n)$，准线 $C$ 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

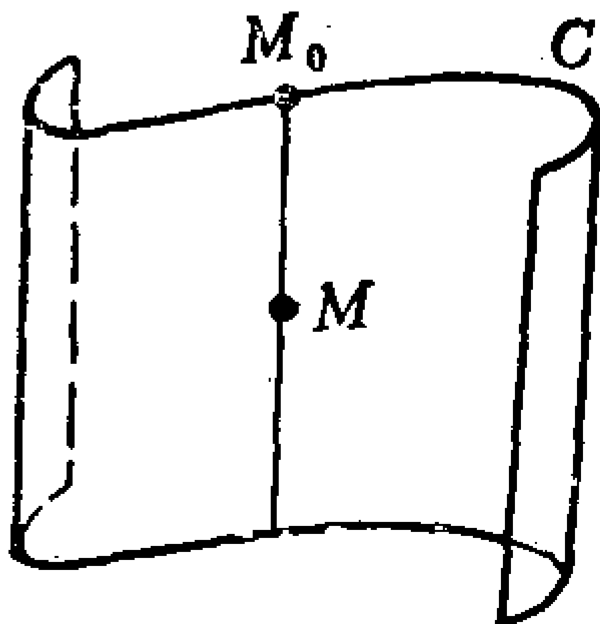



图　3.7

我们来求这个柱面的方程。

点 $M(x,y,z)$ 在此柱面上的充分必要条件是 $M$ 在某一条母线上，即，有准线 $C$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 使得 $M$ 在过 $M_0$，且方向为 $v$ 的直线上(如图3.7)。因此，有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0, \\ x=x_0+lu, \\ y=y_0+mu, \\ z=z_0+nu. \end{cases}$$

消去 $x_0,y_0,z_0$，得

$$\begin{cases} F(x-lu,y-mu,z-nu)=0, \\ G(x-lu,y-mu,z-nu)=0. \end{cases}$$

再消去参数 $u$，得到 $x,y,z$ 的一个方程，就是所求柱面的方程。

如果给的是准线 $C$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{3.8}$$

则同理可得柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x = f(t) + lu, \\ y = g(t) + mu, \\ z = h(t) + nu, \end{cases} \quad \begin{array}{l} a \leqslant t \leqslant b, \\ -\infty < u < +\infty. \end{array} \tag{3.9}$$

## 2.2 圆柱面，点的柱面坐标

现在来看**圆柱面**的方程。圆柱面有一条对称轴 $l$，圆柱面上每一个点到轴 $l$ 的距离都相等，这个距离称为圆柱面的半径。圆柱面的准线可取成一个圆 $C$，它的母线方向与准线圆垂直。如果知道准线圆的方程和母线方向，则可用 2.1 中所述方法求出圆柱面的方程。如果知道圆柱面的半径为 $r$，母线方向为 $\boldsymbol{v}(l,m,n)$，以及圆柱面的对称轴 $l_0$ 经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则点 $M(x,y,z)$ 在此圆柱面上的充分必要条件是 $M$ 到轴 $l_0$ 的距离等于 $r$，即

$$\frac{|\overrightarrow{MM_0} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = r.$$

由此出发可求得圆柱面的方程。特别地，若圆柱面的半径为 $r$，对称轴为 $z$ 轴，则这个圆柱面的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{3.10}$$

空间中任意一点 $M(x,y,z)$ 必在以 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 为半径，以 $z$ 轴为对称轴的圆柱面上。显然这个圆柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = u, \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant \theta < 2\pi, \\ -\infty < u < +\infty. \end{array}$$

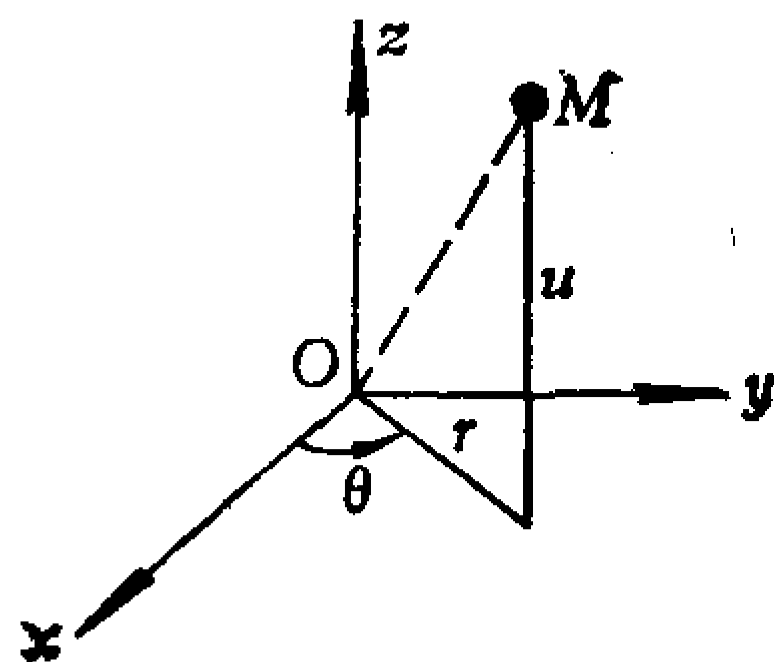


图 3.8

因此，圆柱面上的点 $M$ 被数偶 $(\theta,u)$ 所确定。从而空间中任一点 $M$ 被有序三元实数组 $(r,\theta,u)$ 所确定。$(r,\theta,u)$ 称为点 $M$ 的**柱面坐标**。点 $M$ 的柱面坐

标与它的直角坐标的关系是：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r\geqslant 0, \\ y = r\sin\theta, & 0\leqslant\theta<2\pi, \\ z = u, & -\infty<u<+\infty. \end{cases} \tag{3.11}$$

### 2.3 柱面方程的特点

从(3.10)看到，母线平行于 $z$ 轴的圆柱面的方程中不含 $z$（即 $z$ 的系数为零），这个结论对于一般的柱面也成立，即，我们有

**定理3.1** 若一个柱面的母线平行于 $z$ 轴(或 $x$ 轴，或 $y$ 轴)，则它的方程中不含 $z$（或 $x$，或 $y$）；反之，一个三元方程如果不含 $z$（或 $x$，或 $y$），则它一定表示一个母线平行于 $z$ 轴(或 $x$ 轴，或$y$轴）的柱面。

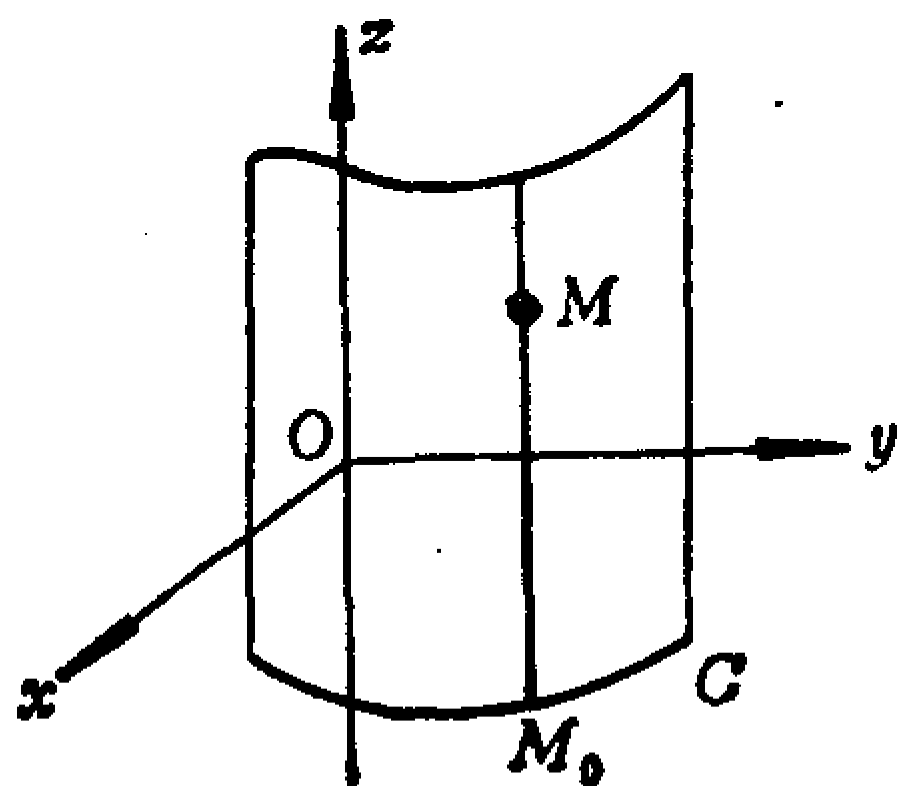


图 3.9

**证明** 设一个柱面的母线平行于 $z$ 轴，则这个柱面的每条母线必与 $xOy$ 面相交，从而这个柱面与 $xOy$ 面的交线 $C$ 可以作为准线，设 $C$ 的方程是

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

点 $M$ 在此柱面上的充分必要条件是：有准线 $C$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 使得 $M$ 在过 $M_0$ 且方向为 $\boldsymbol{v}(0,0,1)$ 的直线上，因此，有

$$\begin{cases} f(x_0,y_0)=0, \\ z_0=0, \\ x=x_0, \\ y=y_0, \\ z=z_0+u. \end{cases}$$

消去 $x_0,y_0,z_0$，得

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=u. \end{cases}$$

由于参数 $u$ 可以取任意实数值，于是得到这个柱面的方程为

$$f(x,y)=0$$

反之，任给一个不含 $z$ 的三元方程 $g(x,y)=0$，我们考虑以曲线 $C'$：

$$\begin{cases} g(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

为准线，以 $z$ 轴方向为母线方向的柱面，由上述议论知，这个柱面的方程为 $g(x,y)=0$。因此，方程 $g(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 $z$ 轴的柱面。

母线平行于 $x$ 轴或 $y$ 轴的情形可类似讨论。

例如，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 表示母线平行于 $z$ 轴的柱面，它与 $xOy$ 面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

这条交线是椭圆，因而这个柱面称为**椭圆柱面**(如图3.10)。

类似地，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0, \qquad x^2+2py=0$$

分别表示母线平行于 $z$ 轴的**双曲柱面**，**抛物柱面**(分别如图3.11

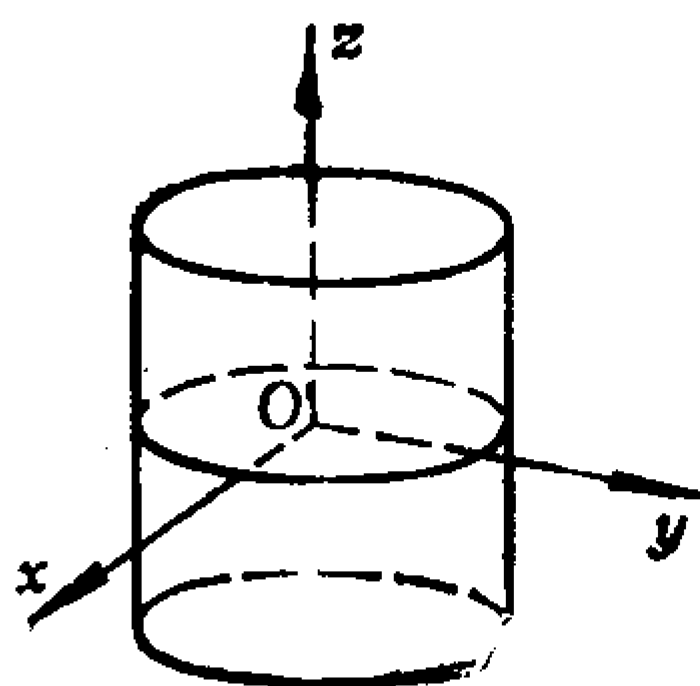


图 3.10

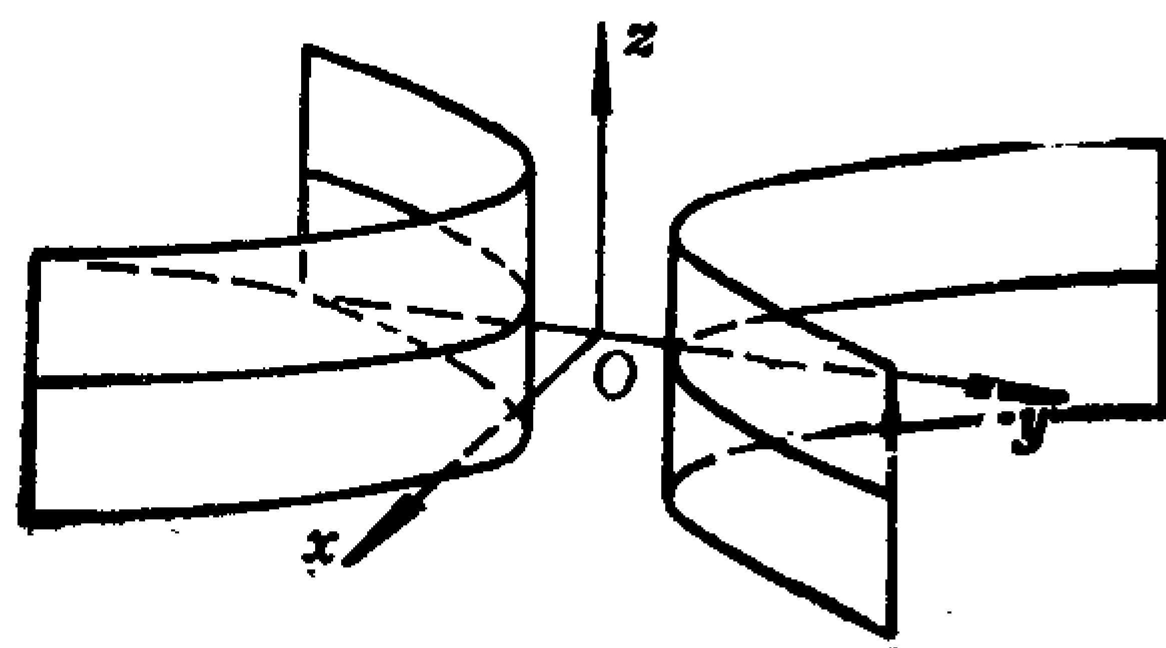


图 3.11

3.12)。

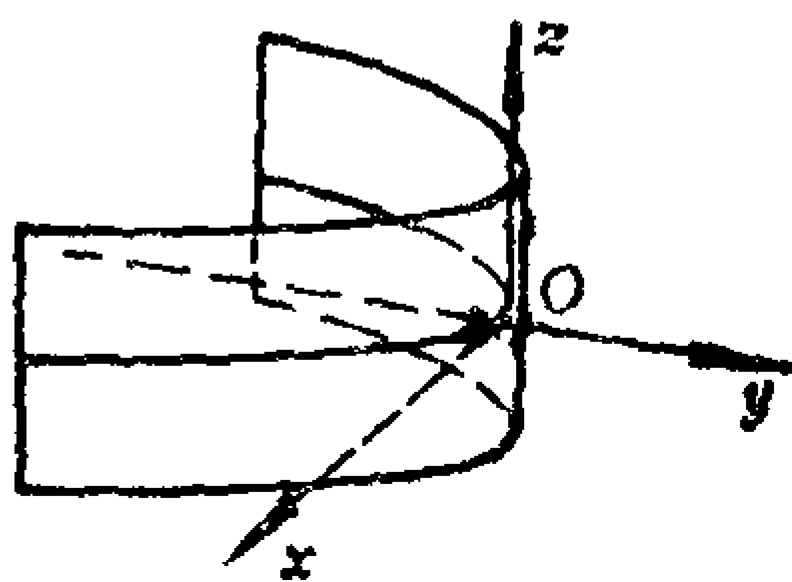



图 3.12

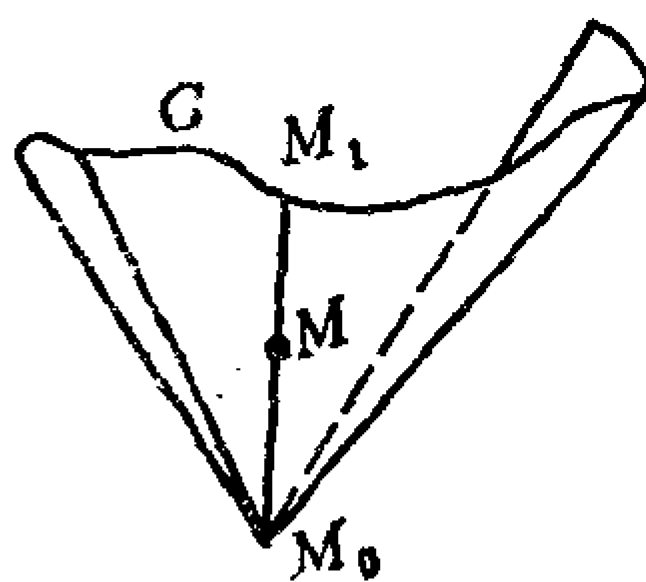



图 3.13

## 2.4 锥面方程的建立

**定义3.3** 在空间中，由曲线$C$上的点与不在$C$上的一个定点$M_0$的连线组成的曲面称为**锥面**。$M_0$称为**顶点**，$C$称为**准线**，$C$上的点与$M_0$的连线称为**母线**。

一个锥面的准线不唯一，与每一条母线都相交的曲线均可作为准线。

设一个锥面的顶点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$，准线$C$的方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

我们来求这个锥面的方程。

点$M(x,y,z)$在此锥面上的充分必要条件是：$M$在一条母线上，即，准线上有一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$使得$M_1$在直线$M_0M$上。因此，有

$$\begin{cases}F(x_1,y_1,z_1)=0,\\G(x_1,y_1,z_1)=0,\\x_1=x_0+(x-x_0)u,\\y_1=y_0+(y-y_0)u,\\z_1=z_0+(z-z_0)u.\end{cases}$$

消去$x_1,y_1,z_1$得

$$\begin{cases}F(x_0+(x-x_0)u,\ y_0+(y-y_0)u,\ z_0+(z-z_0)u)=0,\\G(x_0+(x-x_0)u,\ y_0+(y-y_0)u,\ z_0+(z-z_0)u)=0,\end{cases}$$

再消去 $u$，得到 $x,y,z$ 的一个方程，就是所求锥面的方程。

### 2.5 圆 锥 面

对于**圆锥面**，它有一根对称轴 $l$，它的每一条母线与轴 $l$ 夹的锐角都相等，这个锐角称为圆锥面的**半顶角**。与轴 $l$ 垂直的平面截圆锥面所得交线为圆。如果已知准线圆方程和顶点 $M_0$ 的坐标，则用 2.4 所述方法可求得圆锥面方程。如果已知顶点的坐标和轴 $l$ 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 以及半顶角 $\alpha$，则点 $M(x,y,z)$ 在圆锥面上的充分必要条件是：

$$\langle \overrightarrow{M_0M},\ \boldsymbol{v}\rangle = \alpha \quad 或\ \pi-\alpha,$$

因此，有

$$|\cos\langle \overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{v}\rangle| = \cos\alpha. \tag{3.12}$$

由(3.12)可求得圆锥面的方程。

**例3.5** 求以三根坐标轴为母线的圆锥面的方程。

**解** 显然这个圆锥面的顶点为原点 $O$，设轴 $l$ 的方向为 $\boldsymbol{v}$，因为三根坐标轴为母线，所以由(3.12)得

$$|\cos\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{v}\rangle| = |\cos\langle \boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}\rangle| = |\cos\langle \boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{v}\rangle|.$$

因此，轴 $l$ 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为 $(1,1,1)$ 或 $(1,1,-1)$ 或 $(1,-1,1)$ 或 $(1,-1,-1)$。考虑 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为$(1,1,1)$，其余三种情形可类似讨论。

因为点 $M(x,y,z)$ 在这个圆锥面上的充分必要条件是

$$|\cos\langle \overrightarrow{OM}, \boldsymbol{v}\rangle| = |\cos\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{v}\rangle|,$$

即

$$\frac{|\overrightarrow{OM}\cdot \boldsymbol{v}|}{|\overrightarrow{OM}|\,|\boldsymbol{v}|} = \frac{|\boldsymbol{e}_1\cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|},$$

于是得

$$xy + yz + xz = 0. \tag{3.13}$$

这就是所求的一个圆锥面的方程。

## 2.6 锥面方程的特点

方程(3.13)的特点是：每一项都是二次的，称为二次齐次方程。如果令 $F(x,y,z)=xy+yz+xz$，则有

$$F(tx,ty,tz)=t^2(xy+yz+xz)=t^2F(x,y,z). \tag{3.14}$$

关系式(3.14)可反映方程(3.12)是二次齐次方程的这一特点。一般地，有

**定义3.4** $F(x,y,z)$称为是 $x,y,z$ 的 $n$ 次**齐次函数**（$n$ 是整数），如果

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z)$$

对于定义域中一切 $x,y,z$ 以及对于任意非零实数 $t$ 都成立。此时，方程 $F(x,y,z)=0$ 称为 $x,y,z$ 的 $n$ 次**齐次方程**。

**定理3.2** $x,y,z$ 的齐次方程表示的曲面(添上原点)一定是以原点为顶点的锥面。

**证明** 设 $F(x,y,z)=0$是 $n$ 次齐次方程，它表示的曲面添上原点后记作 $S$。在 $S$ 上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$M_0$ 不是原点。于是直线 $OM_0$ 上任一点 $M_1\neq O$ 的坐标$(x_1,y_1,z_1)$适合

$$\begin{cases}x_1=x_0t,\\ y_1=y_0t, \quad t\neq 0.\\ z_1=z_0t,\end{cases} \tag{3.15}$$

从而有

$$F(x_1,y_1,z_1)=F(x_0t,y_0t,z_0t)=t^nF(x_0,y_0,z_0)=0. \tag{3.16}$$

因此 $M_1$ 在 $S$ 上。于是整条直线 $OM_0$ 都在 $S$ 上，所以 $S$ 是由过原点的一些直线组成的，这说明 $S$ 是锥面。

**定理3.3** 在以锥面的顶点为原点的直角坐标系里，锥面可以用 $x,y,z$ 的齐次方程表示。

证明从略。

## 习 题 3.2

1． 求半径为 2，对称轴为 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 的圆柱面方程。

2． 设圆柱面的对称轴为：

$$\begin{cases}x=t,\\ y=1+2t,\\ z=-3-2t,\end{cases}$$

且已知点 $M_1(1,-2,1)$ 在这个圆柱面上，求这个圆柱面方程。

3． 已知圆柱面的三条母线为：

$$x=y=z,\quad x+1=y=z-1,\quad x-1=y+1=z,$$

求这个圆柱面的方程。

4． 求柱面方程。

(1) 准线为

$$\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0,\end{cases}$$

母线平行于 $x$ 轴；

(2) 准线为

$$\begin{cases}xy=4,\\ z=0,\end{cases}$$

母线方向为 $(1,-1,1)$；

(3) 准线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ 2x^2+2y^2+z^2=2,\end{cases}$$

母线方向为 $(-1,0,1)$；

(4) 准线为

$$\begin{cases}x=y^2+z^2,\\ x=2z,\end{cases}$$

母线垂直于准线所在平面。

5. 求准线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ z=0\end{cases}$$

的圆柱面的方程，这样的圆柱面有几个？

6. 求顶点为(1,2,3)，轴与平面 $2x+2y-z+1=0$ 垂直，母线与轴夹角为$\dfrac{\pi}{6}$的圆锥面的方程。

7. 求顶点为(1,2,4)，轴与平面 $2x+2y+z=0$垂直，且经过点(3,2,1)的圆锥面的方程。

8. 给定球面 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-20=0$，求以(2,6,10)为顶点的切锥面的方程。

9. 求锥面方程。

(1) 顶点为(4,0,-3)，准线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

(2) 顶点为原点，准线为

$$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=-5.\end{cases}$$

(3) 顶点为原点，准线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ x^2+y^2+2z-5=0.\end{cases}$$

(4) 顶点为(0,0,2$R$)，准线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rz,\\ ax+by+cz+d=0.\end{cases}$$

10. 已知锥面$S$的顶点为(2,5,4)，$S$与$yOz$平面的交线为一圆，这个圆的圆心为(0,1,1)，半径为2，求这个锥面方程。

*11．已知球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外切柱面的母线垂直于平面$x+y-2z-5=0$，求这个柱面方程。

*12．证明：球面的外切柱面是圆柱面。

*13．过 $x$ 轴和 $y$ 轴分别作动平面，交角 $\alpha$ 是常数，求交线的轨迹方程，并且证明它是一个锥面。

## §3 二次曲面

前面两节，我们抓住几何特征很明显的球面，旋转面，柱面，锥面建立它的方程。本节则对于比较简单的二次方程，从方程出发去研究图形的性质。

我们已经知道二次方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0, \quad x^2+2py=0$$

分别表示椭圆柱面，双曲柱面和抛物柱面。而二次方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

则表示二次锥面。现在再研究几个二次方程表示的图形。

### 3.1 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0) \tag{3.17}$$

表示的图形称为**椭球面**。它有以下性质：

(1) 对称性。因为方程(3.17)中用 $-x$ 代 $x$，方程不变，于是若点 $P(x,y,z)$ 在椭球面(3.17)上，则 $P$ 点关于 $yOz$ 面的对称点$(-x,y,z)$也在此椭球面上，所以此椭球面关于 $yOz$ 面对称。同理，由于(3.17)中用 $-y$ 代 $y$ ($-z$ 代 $z$)方程不变，所以此椭球面关于 $xOz$ 面($xOy$ 面)对称．因为方程(3.17)中同时

用 $-x$ 代 $x$，用 $-y$ 代 $y$，方程不变，所以图形关于 $z$ 轴对称。类似的理由知，图形关于 $y$ 轴、$x$ 轴也对称。因为(3.17)中同时用 $-x$ 代 $x$，$-y$ 代 $y$，$-z$ 代 $z$，方程不变，所以图形关于原点对称，总而言之，三个坐标面都是椭球面(3.17)的对称平面，三根坐标轴都是它的对称轴，原点是它的对称中心。

(2) 范围。由方程(3.17)立即看出：

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c.$$

(3) 形状。曲面(3.17)与 $xOy$ 面的交线为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

这是在 $xOy$ 面上的一个椭圆。同理可知，曲面(3.17)与 $yOz$ 面($xOz$ 面)的交线也是椭圆。

用平行于 $xOy$ 面的平面 $z=h$ 截曲面(3.17)得到的交线（称为**截口**)为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

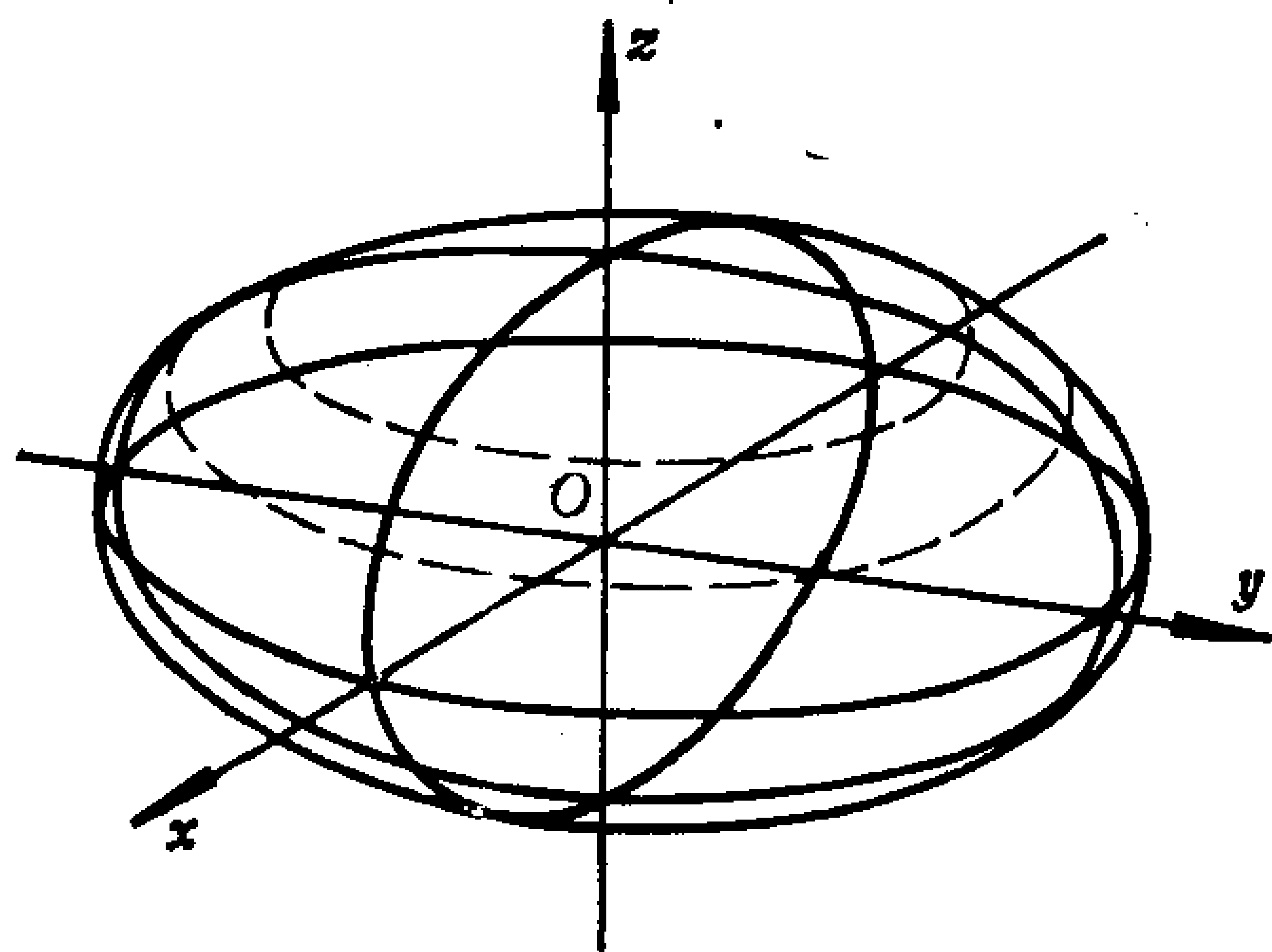


图 3.14

当 $|h|<c$ 时，截口是椭圆；当 $|h|=c$ 时，截口是一个点；当 $|h|>c$ 时，无轨迹。

(4) 等高线。把平行于 $xOy$ 面的截口投影到 $xOy$ 面上得到的投影线称为**等高线**（见下页的图3.15）。

## 3.2 单叶双曲面和双叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0) \tag{3.18}$$

表示的图形称为**单叶双曲面**。它有下述性质：

(1) 对称性。三个坐标面都是此图形的对称平面，三根坐标轴都是它的对称轴，原点是它的对称中心。

(2) 范围。由方程(3.18)得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\geqslant 1,$$

所以此曲面的点全在柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的外部或柱面上。

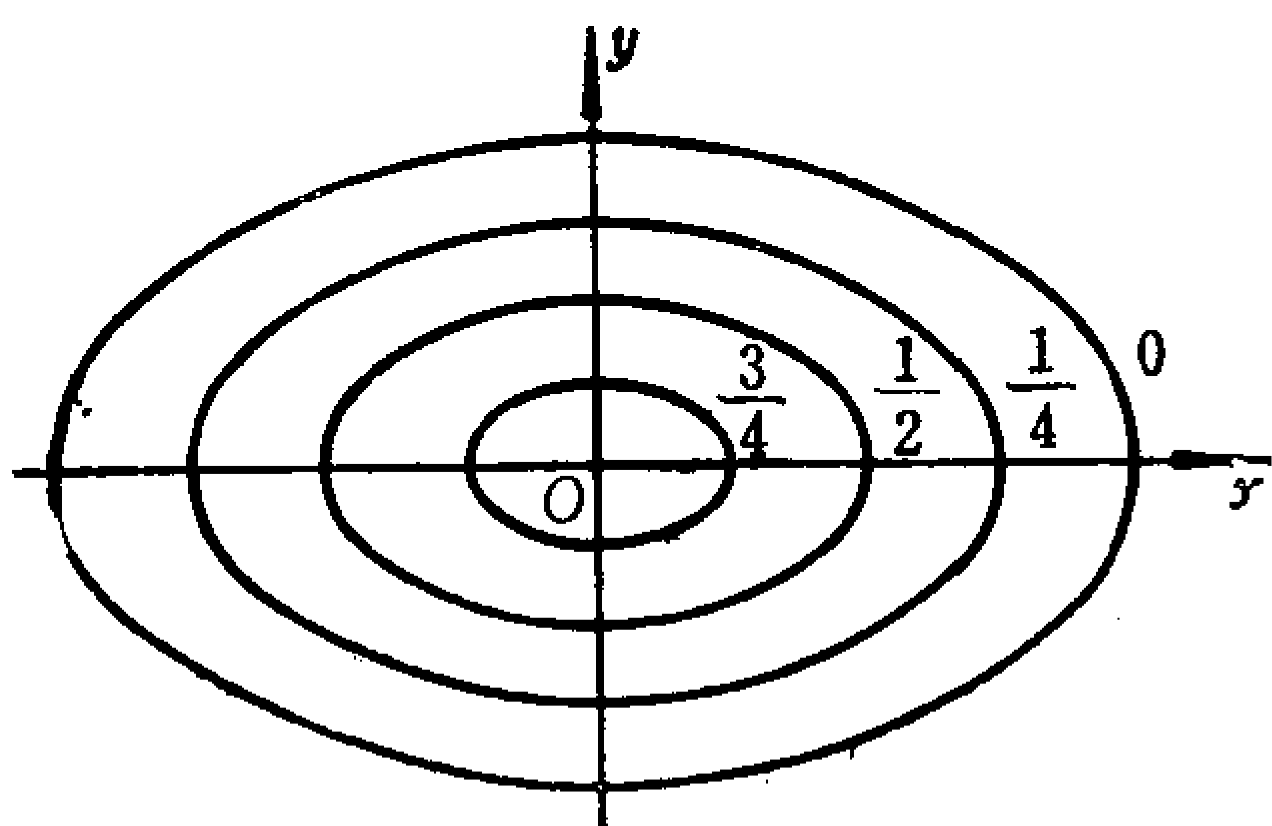



图 3.15

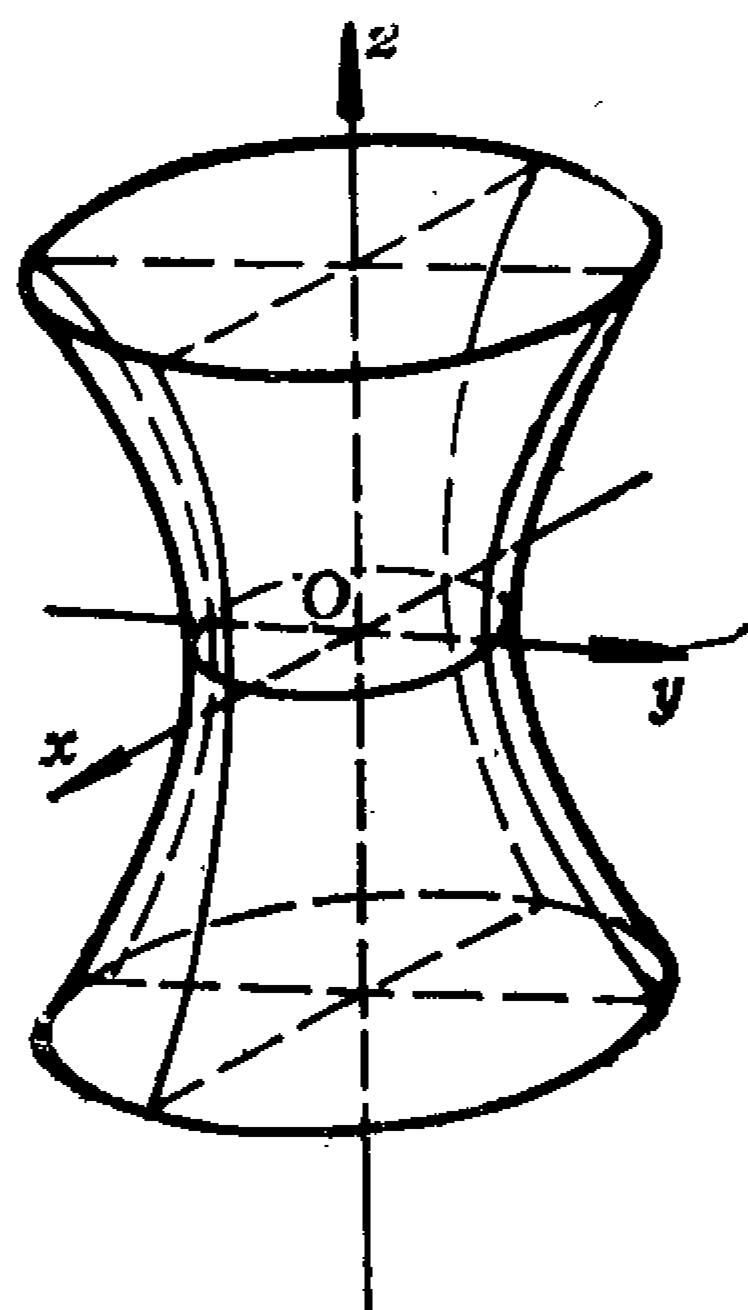



图 3.16

(3) 形状。此曲面与 $xOy$ 面的交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

这是一个椭圆，称为此曲面的**腰椭圆**。

此曲面与 $xOz$ 面，$yOz$ 面的交线分别为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases}$$

它们都是双曲线。

此曲面的平行于 $xOy$ 面的截口为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$$

这是椭圆，并且当 $|h|$ 增大时，截口椭圆的长、短半轴：

$$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

均增大。

(4) 渐近锥面。锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{3.19}$$

称为单叶双曲面(3.18)的**渐近锥面**。

用平面 $z=h$ 截此锥面，截口为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$$

这个椭圆的长、短半轴分别为：

$$a''=a\frac{|h|}{c},\quad b''=b\frac{|h|}{c}.$$

因为

$$a'-a''=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}-a\frac{|h|}{c}=\frac{a}{\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}+\dfrac{|h|}{c}},$$

所以 $\lim\limits_{|h|\to\infty}(a'-a'')=0$。同理 $\lim\limits_{|h|\to\infty}(b'-b'')=0$。这说明，

当$|h|$无限增大时，单叶双曲面的截口椭圆与它的渐近锥面的截口椭圆任意接近，即，单叶双曲面与它的渐近锥面无限地任意接近。

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a,b,c>0) \tag{3.20}$$

表示的图形称为**双叶双曲面**。它有下述性质：

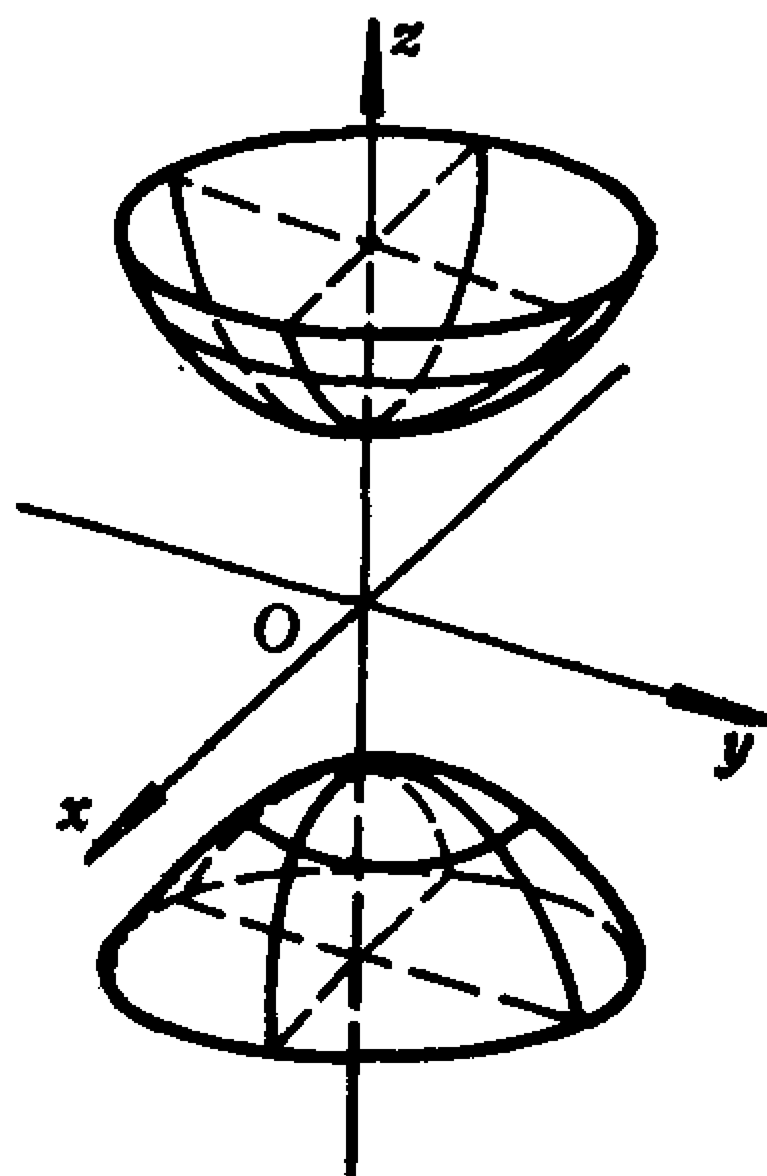


图3.17

(1) 对称性。关于坐标面，坐标轴，原点均对称。

(2) 范围。由(3.20)得$|z|\geqslant c$。

(3) 形状。此曲面与$xOy$面无交点；与$xOz$面，$yOz$面的交线分别为：

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0,\end{cases}$$

它们都是双曲线。用平面$z=h(|h|\geqslant c)$去截此曲面得到的截口为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h,\end{cases}$$

这是椭圆或一个点。

(4) 渐近锥面。锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

也是双叶双曲面(3.20)的渐近锥面。

## 3.3 椭圆抛物面和双曲抛物面

方程

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z(p,q>0) \tag{3.21}$$

表示的曲面称为**椭圆抛物面**。它有下述性质：

(1) $xOz$ 面，$yOz$ 面是它的对称平面；$z$ 轴是对称轴。

(2) 范围：$z\geqslant 0$。

(3) 形状。它与 $xOz$ 面，$yOz$ 面的交线分别为：

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=2qz, \\ x=0, \end{cases}$$

这些都是抛物线。用平面 $z=h(h\geqslant 0)$ 去截此曲面得到的截口为：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h, \\ z=h, \end{cases}$$

它们是椭圆或一个点（见图3.18）。

方程

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z(p,q>0) \tag{3.22}$$

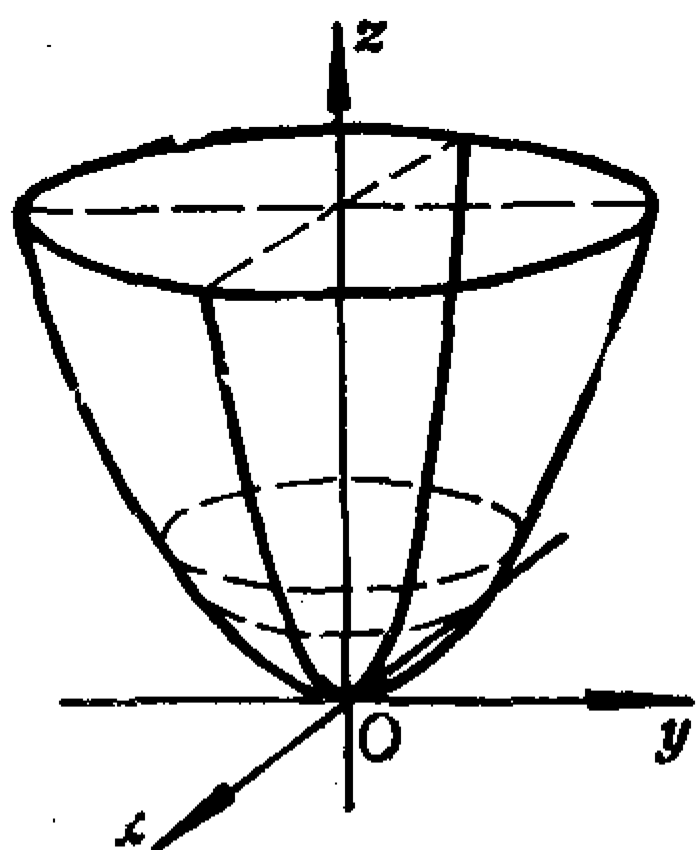



图 3.18

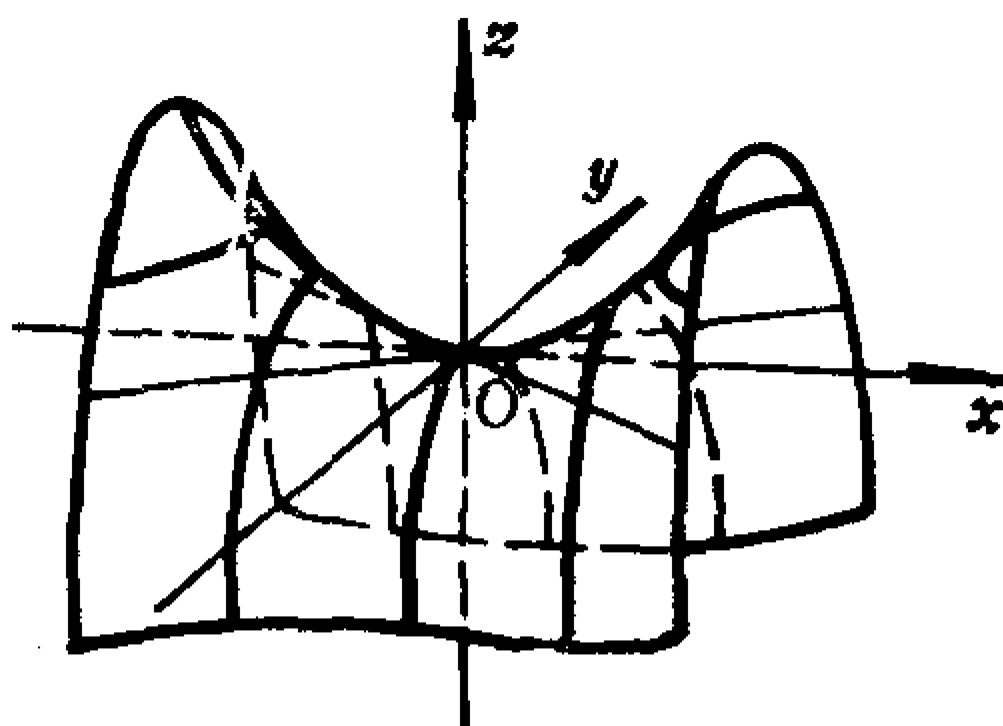



图 3.19

表示的曲面称为**双曲抛物面(或马鞍面)**。

$xOz$ 面，$yOz$ 面都是双曲抛物面(3.22)的对称平面；$z$ 轴是它的对称轴。

它与 $xOy$ 面的交线为：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

这是一对相交直线（过原点）。双曲抛物面(3.22)与 $xOz$ 面，$yOz$ 面的交线分别为：

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

这些都是抛物线。用平面 $z = h(h \neq 0)$去截此曲面，得到的截口为：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases}$$

这是双曲线，当 $h > 0$ 时，实轴平行于 $x$ 轴；当 $h < 0$ 时，实轴平行于 $y$ 轴（见图3.19）。

当平行移动抛物线 $y^2 = -2qz$，$x = 0$，使它的顶点沿抛物线 $x^2 = 2pz$，$y = 0$ 移动时，便得到马鞍面(3.22)。这是因为，点 $M(x, y, z)$在此轨迹上的充分必要条件是：$M$在以抛物线

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

上的一个点$M_0(x_0, y_0, z_0)$为顶点且轴平行于 $z$ 轴，形状、开口与

$$\begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$$

一样的抛物线上，即有

$$\begin{cases} x_0^2 = 2pz_0, \\ y_0 = 0, \\ y^2 = -2q(z - z_0), \\ x = x_0. \end{cases}$$

消去 $x_0, y_0, z_0$，得到

$$y^2 = -2q\left(z - \frac{x^2}{2p}\right),$$

即

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

## 3.4 二次曲面的种类

到目前为止，我们学过的二次曲面有以下十七种。

**（一）椭球面。**

[1] 椭球面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

[2] 虚椭球面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$；

[3] 点： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$。

**（二）双曲面**

[4] 单叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；

[5] 双叶双曲面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$。

**（三）抛物面**

[6] 椭圆抛物面： $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$；

[7] 双曲抛物面： $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$。

**（四）二次锥面**

[8] 二次锥面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$。

**（五）二次柱面**

[ 9 ] 椭圆柱面：　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

[10] 虚椭圆柱面：　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$；

[11] 直线：　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$；

[12] 双曲柱面：　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

[13] 一对相交平面：　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$；

[14] 抛物柱面：　$x^2=2py$；

[15] 一对平行平面：　$x^2=a^2$；

[16] 一对虚平行平面：　$x^2=-a^2$；

[17] 一对重合平面：　$x^2=0$。

在高等代数课程中，我们将证明二次曲面只有这十七种。

## 习　题　3.3

1.已知椭球面的对称轴与坐标轴重合，且通过椭圆

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

以及点 $M(1,2,\sqrt{23})$，求这个椭球面的方程。

2. 已知椭圆抛物面的顶点为原点，对称平面为 $xOz$ 面和 $yOz$ 面，且过点 $(1,2,5)$ 和 $\left(\frac{1}{3},-1,1\right)$，求这个椭圆抛物面的方

程。

3． 已知马鞍面的鞍点为原点，对称平面为 $xOz$ 面和 $yOz$ 面，且过点$(1,2,0)$和$\left(\frac{1}{3},-1,1\right)$，求这个马鞍面的方程。

4． 求经过两条抛物线：

$$\begin{cases} x^2-6y=0, \\ z=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} z^2+4y=0, \\ x=0 \end{cases}$$

的二次曲面的方程。

5． 给定方程

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1 \quad (a>b>c>0),$$

问当 $k$ 取异于 $a^2,b^2,c^2$ 的各种实数值时，它表示怎样的曲面？

6． 适当选取坐标系，求下列轨迹的方程。

(1) 到两定点距离之差等于常数的点的轨迹；

(2) 到一定点和一定平面(定点不在定平面上)距离之比等于常数的点的轨迹；

(3) 设有一个固定平面和垂直于它的一条定直线，求到定平面与到定直线的距离相等的点的轨迹；

(4) 求与两给定直线等距离的点的轨迹，已知两直线之间的距离为 $a$，夹角为 $\alpha$。

7． 设一个定点与一条二次曲线不在同一平面上，证明：以定点为顶点，以这条二次曲线为准线的锥面是二次曲面。

*8．由椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心 $O$ 任意引三条相互垂直的射线，与曲面分别交于 $P_1,P_2,P_3$；设 $|\overrightarrow{OP_i}|=r_i$，$i=1,2,3$。证明：

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

*9．证明：用通过坐标轴的平面和椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c>0)$$

相截时，有且仅有两条截口曲线是圆，并说明这两张截面的位置。

## §4 直纹面

我们看到，柱面和锥面都是由直线组成的，这样的曲面称为直纹面，确切地说

**定义3.4** 一曲面 $S$ 称为**直纹面**，如果存在一族直线使得这一族中的每一条直线全在 $S$ 上；并且 $S$ 上的每个点都在这一族的某一条直线上。这样一族直线称为 $S$ 的**一族直母线**。

二次曲面中哪些是直纹面？二次柱面(九种)和二次锥面(一种)都是直纹面。椭球面(三种)不是直纹面，因为它有界。双叶双曲面不是直纹面，因为当它由方程(3.20)给出时，平行于 $xOy$ 面的直线不可能全在 $S$ 上，与 $xOy$ 面相交的直线也不会全在 $S$ 上。类似地可知，椭圆抛物面不是直纹面。剩下两种二次曲面：单叶双曲面和双曲抛物面，我们现在来说明它们都是直纹面。

**定理3.4** 单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面。

**证明** 设单叶双曲面 $S$ 的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3.23}$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在单叶双曲面 $S$ 上的充分必要条件是

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

移项并且分解因式得

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right), \tag{3.24}$$

即

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c} & 1+\frac{y_0}{b} \\ 1-\frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c} \end{vmatrix}=0, \tag{3.25}$$

或

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c} & 1-\frac{y_0}{b} \\ 1+\frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c} \end{vmatrix}=0. \tag{3.26}$$

因为$1+\frac{y_0}{b}$与$1-\frac{y_0}{b}$不全为零，所以下述方程组

$$\begin{cases} \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)X+\left(1+\frac{y_0}{b}\right)Y=0, \\ \left(1-\frac{y_0}{b}\right)X+\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)Y=0 \end{cases} \tag{3.27}$$

是$X,Y$的一次齐次方程组。由(3.25)知，(3.27)有非零解，即有不全为零的实数$\mu_0,\nu_0$使得

$$\begin{cases} \mu_0\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)+\nu_0\left(1+\frac{y_0}{b}\right)=0, \\ \mu_0\left(1-\frac{y_0}{b}\right)+\nu_0\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=0. \end{cases}$$

这表明点$M_0$在直线

$$\begin{cases}\mu_0\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_0\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu_0\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_0\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases} \tag{3.28}$$

上。现在考虑一族直线：

$$\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0,\\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0,\end{cases} \tag{3.29}$$

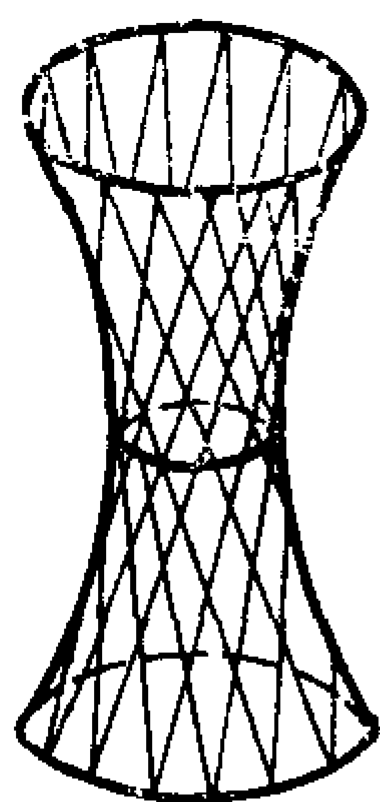


图 3.20

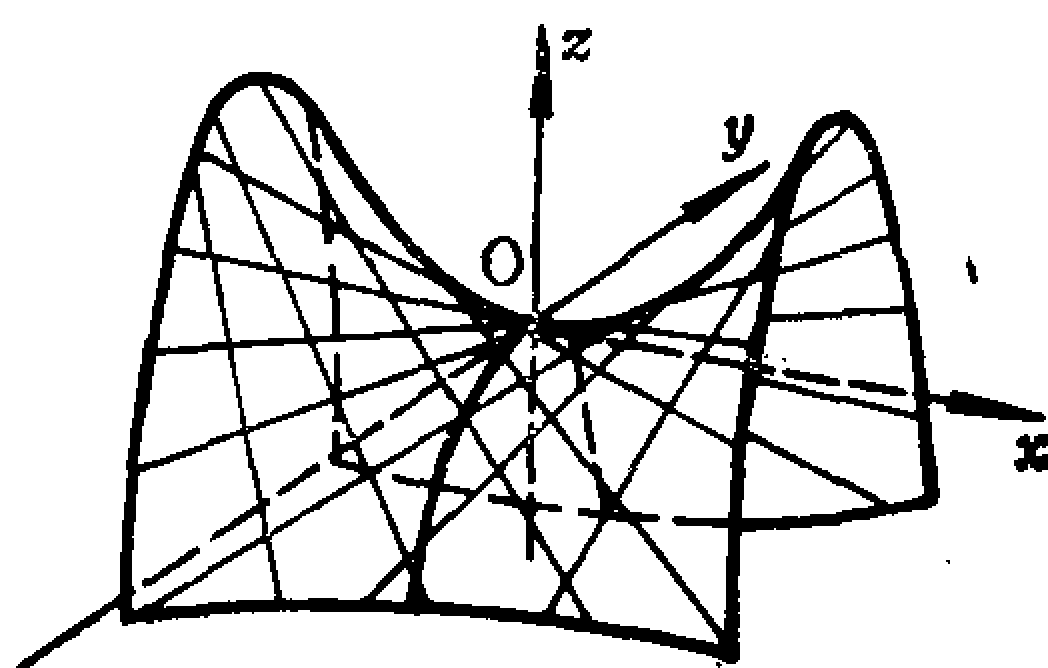



图 3.21

其中 $\mu,\nu$ 取所有不全为零的实数。若 $(\mu_1,\nu_1)$ 与 $(\mu_2,\nu_2)$ 成比例，则它们确定(3.29)族中的同一条直线，若它们不成比例，则它们确定不同的直线。所以直线族(3.29)实际上只依赖于一个参数：$\mu$ 与 $\nu$ 的比值。上面证明了：单叶双曲面 $S$ 上的任一点 $M_0$ 在直线族(3.29)的某一条直线(3.28)上。现在从族(3.29)中任取一条直线 $l_1$，它对应于 $(\mu_1,\nu_1)$，且在 $l_1$ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则有

$$\begin{cases}\mu_1\left(\frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y_1}{b}\right)=0,\\ \mu_1\left(1-\frac{y_1}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}\right)=0.\end{cases} \tag{3.30}$$

因为 $\mu_1,\nu_1$ 不全为零，所以(3.30)式说明二元一次齐次方程组

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{z_1}{c}\right)X+\left(1+\dfrac{y_1}{b}\right)Y=0,\\ \left(1-\dfrac{y_1}{b}\right)X+\left(\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{z_1}{c}\right)Y=0\end{cases} \tag{3.31}$$

有非零解，从而(3.31)的系数行列式等于零。于是由本证明的开始部分知，$M_1(x_1,y_1,z_1)$在单叶双曲面 $S$ 上。所以，$S$ 是直纹面，且直线族(3.29)是它的一族直母线。

类似地，用(3.26)可得 $S$ 的另一族直母线：

$$\begin{cases}\mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\dfrac{y}{b}\right)=0,\\ \mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right)+\nu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0,\end{cases} \tag{3.32}$$

其中 $\mu,\nu$ 取所有不全为零的实数。

类似的方法可以证明双曲抛物面也是直纹面。若它的方程是

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \tag{3.33}$$

则它有两族直母线：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0,\\ z+\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0,\end{cases} \tag{3.34}$$

和

$$\begin{cases}\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+z=0,\\ 2\lambda+\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0,\end{cases} \tag{3.35}$$

其中 $\lambda$ 取所有实数。

## 习　题　3.4

1．求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$的过点$(2,3,-4)$的母线。

2．求直线族

$$\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\lambda}{0}$$

所形成的曲面。

3．求与下列三条直线同时共面的直线所产生的曲面。

$$l_1:\ \begin{cases}x=1,\\ y=z;\end{cases}\qquad l_2:\ \begin{cases}x=-1,\\ y=-z;\end{cases}\qquad l_3:\ \frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}.$$

4．求所有与直线

$$l_1:\ \frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}\quad 和\ l_2:\ \frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$$

都共面，且与平面

$$\pi:\ 2x+3y-5=0$$

平行的直线所构成的曲面方程。

5．设有直线 $l_1$ 和 $l_2$，它们的方程分别是：

$$\begin{cases}x=\frac{3}{2}+3t,\\ y=-1+2t,\\ z=-t;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x=3t,\\ y=2t,\\ z=0.\end{cases}$$

求所有由 $l_1,l_2$上有相同参数 $t$ 值的点的连线所构成的曲面方程。

6．证明：马鞍面同族的所有直母线都平行于同一个平面，并且同族的任意两条直母线异面。

7．证明：马鞍面异族的任意两条直母线必相交。

*8．证明：单叶双曲面同族中的任意三条直母线都不平行于同一个平面。

*9．证明：单叶双曲面同族的两条直母线异面。

*10．证明：单叶双曲面异族的两条直母线共面。

11．求马鞍面的正交直母线的交点轨迹。

*12．给定单叶双曲面 $S$：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0),$$

求经过 $S$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，沿方向 $(X,Y,Z)$ 的直线是 $S$ 的直母线的条件；由此证明：经过 $S$ 上每一点恰有两条直母线。

*13．证明：单叶双曲面的每条直母线都与腰椭圆相交。

*14．设 $l_1,l_2$ 是异面直线，它们都与 $xOy$ 面相交，证明：与 $l_1,l_2$ 都共面并且与 $xOy$ 面平行的直线所组成的曲面是马鞍面。

*15．设三条直线 $l_1,l_2,l_3$ 两两异面，且平行于同一平面，证明：与 $l_1,l_2,l_3$ 都相交的直线所组成的曲面是马鞍面。

## §5 曲面的交线，曲面所围成的区域

### 5.1 画空间图形常用的三种方法

在纸上画空间图形时，常用的有三种方法。

(1) 斜二测法(即斜二等轴测投影法)．让 $z$ 轴铅直向上，$y$

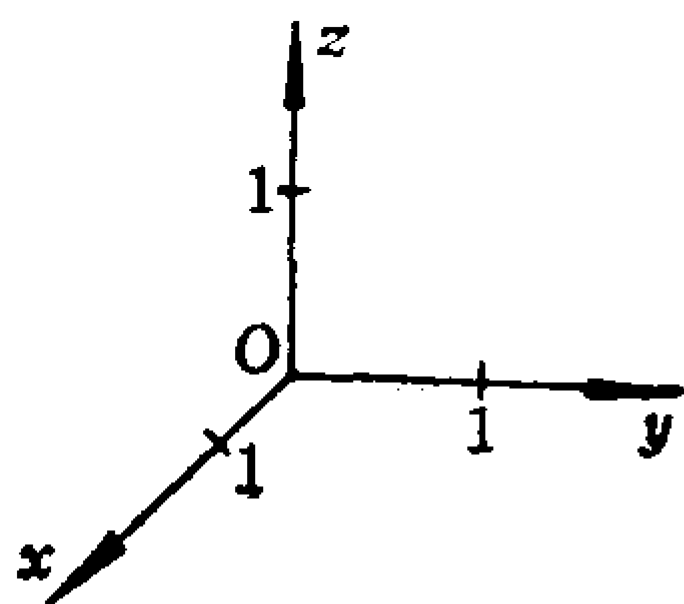



图 3.22

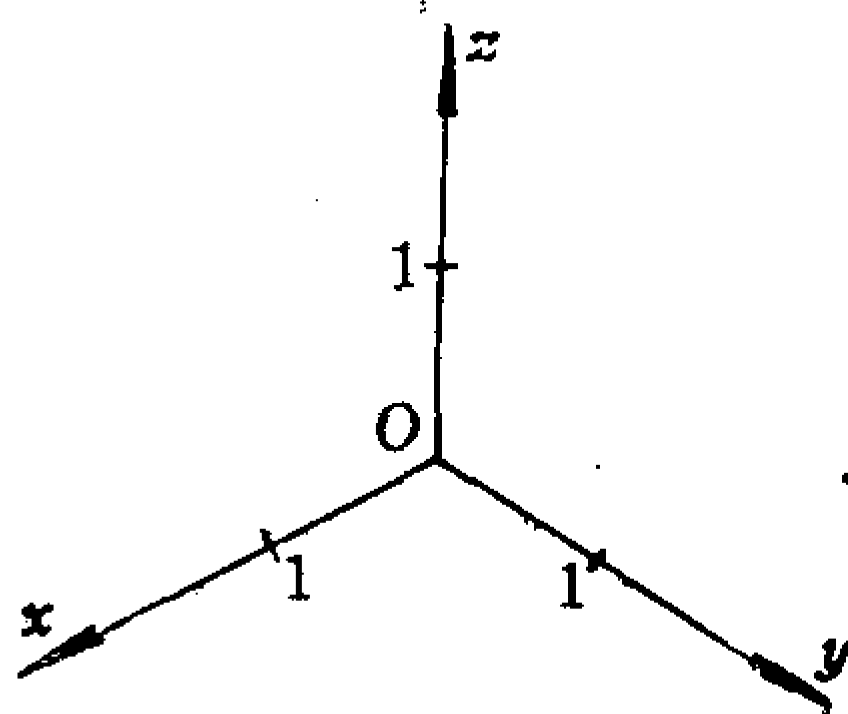



图 3.23

轴水平向右，$x$ 轴与 $y$ 轴、$z$ 轴分别成135°角。规定 $y$ 轴与 $z$ 轴的单位长度相等；而 $x$ 轴的单位长度为 $y$ 轴单位长度的一半(图3.22)。

(2) 正等测法(即正等轴测投影法)。让 $z$ 轴铅直向上，$x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴两两成120°角；规定三根轴的单位长度相等。(如图3.23)。

(3) 正二测法(即正二等轴测投影法)．让$z$轴铅直向上，$x$轴与$z$轴的夹角为$90°+\alpha$，其中 $\alpha$ 是锐角，且 $tg\alpha\approx\frac{5}{8}$；$y$轴与 $z$ 轴的夹角为$90°+\beta$，其中 $\beta$ 是锐角，且$tg\beta\approx\frac{1}{8}$。规定 $z$ 轴和 $y$ 轴的单位长度相等，$x$ 轴的单位长度约为 $y$ 轴单位长度的一半。有时，也让 $x$ 轴与 $z$ 轴夹角为$90°+\beta$，其中 $tg\beta\approx\frac{1}{8}$；让 $y$ 轴的负向与 $z$ 轴的夹角为$90°+\alpha$，其中 $tg\alpha\approx\frac{5}{8}$；此时 $x$ 轴与 $z$ 轴的单位长度相等，$y$ 轴的单位长度约为 $z$ 轴单位长度的一半。

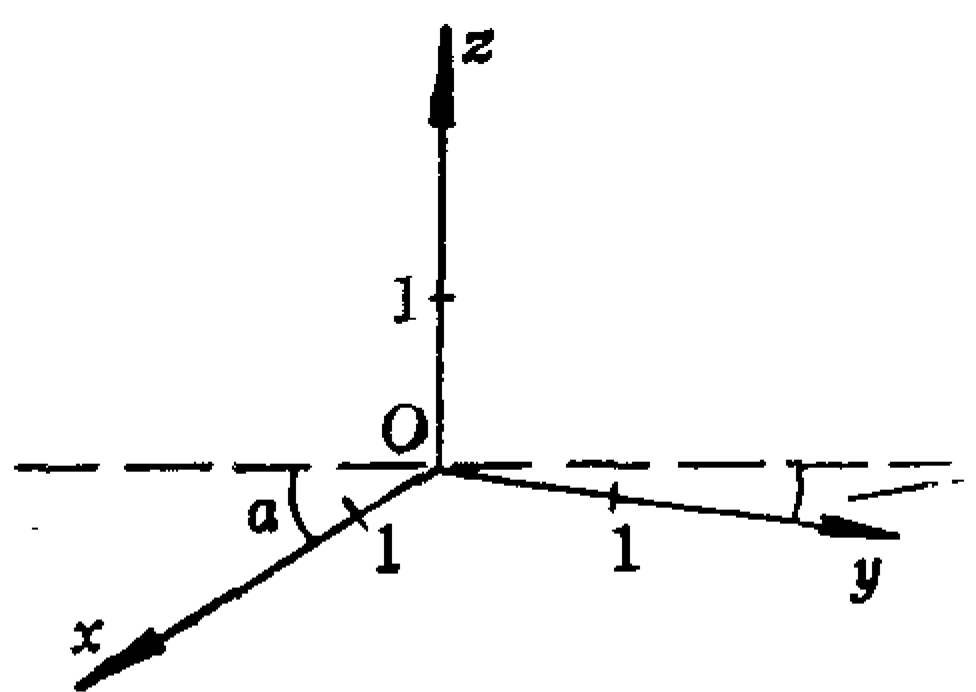


图 3.24

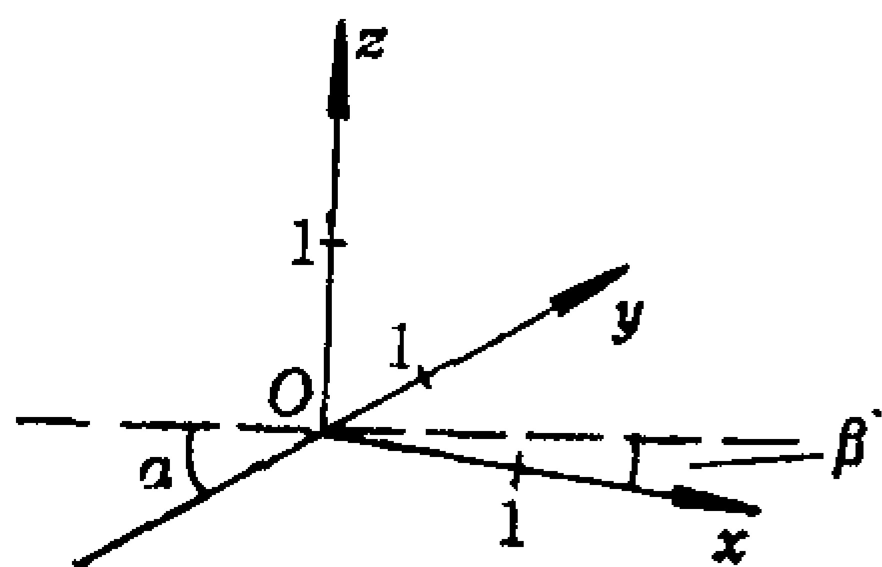


图 3.25

一般来说，采用正二测法画出的图形较逼真。我们现在用正二测法画空间中的一个圆，它的方程是：

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=2. \end{cases}$$

先过点 $M(0,2,0)$分别作 $z$ 轴、$x$ 轴的平行线，并截取$ME=ME'$

$=1$（$z$ 轴单位长），截取 $MF=MF'=1$（$x$ 轴单位长）。过 $E,E'$，$F,F'$ 分别作 $x$ 轴、$z$ 轴的平行线，相交成一个平行四边形 $ABCD$，再作它的内切椭圆，使切点为 $E,E',F,F'$。则所画的这个内切椭圆就是我们所要画的空间中的圆（注：在画出直线 $EE'$、$FF'$ 后，也可用描点法画出我们所要画的图）。

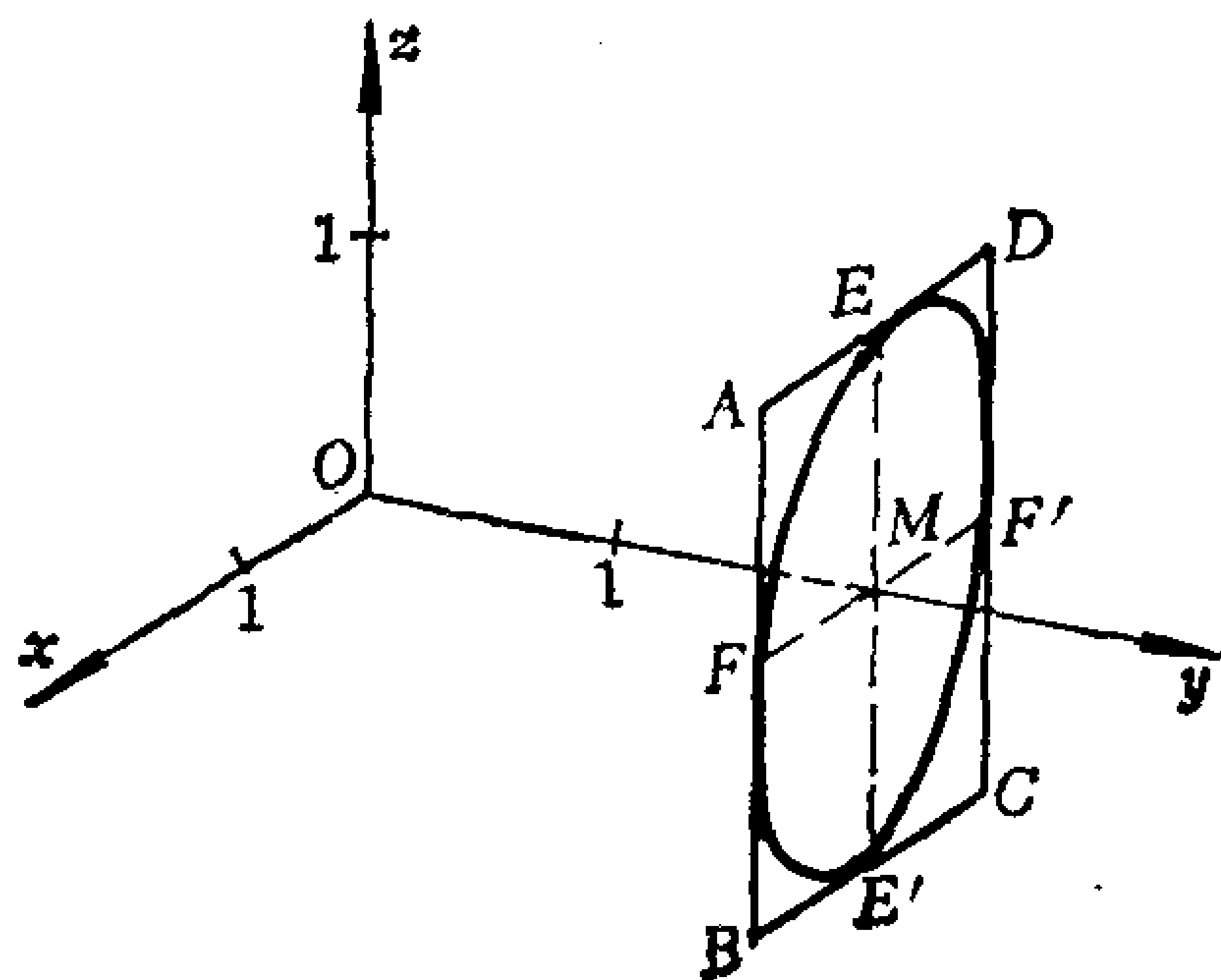



图 3.26

画空间中的椭圆的方法与上述类似。画空间中的双曲线或抛物线时，先画出它们所在的平面（若它平行于坐标面，则类似于上述画直线 $EE'$ 和 $FF'$），然后在这个平面内用描点法画出双曲线或抛物线。我们已经会画空间中的椭圆、双曲线、抛物线，从而也就容易画出§3中用标准方程给出的二次曲面了。例如，画单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

只要先画出用 $z=\pm c$ 截曲面所得的截口椭圆以及腰椭圆，再画出曲面与 $xOz$ 面，$yOz$ 面相交所得的双曲线，最后画出必要的轮廓线就可以了（如图3.16）。

## 5.2 曲线在坐标面上的投影，曲面的交线的画法

空间中任一点 $M$ 以及它在三个坐标面上的投影点 $M_1,M_2,M_3$

这四个点中，只要知道了其中两个点，就可以画出另外两个点。譬如，若知道了 $M_2, M_3$ 两个点，则只要分别过 $M_2, M_3$ 画出投影线（平行于相应坐标轴的直线），它们的交点就是 $M$ 点，再过 $M$ 画投影线（平行于 $z$ 轴），它与 $xOy$ 面的交点就是 $M_1$。

根据上述道理，为了画出两个曲面的交线 $\Gamma$，就只要先画出 $\Gamma$ 上每个点在某两个坐标面上的投影。

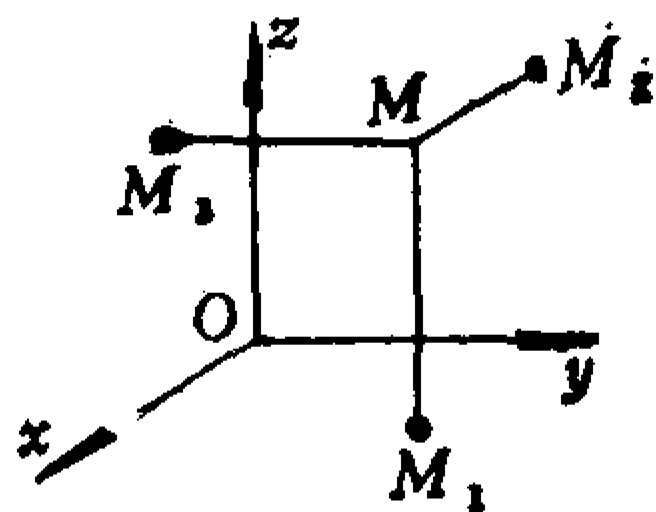



图 3.27

曲线 $\Gamma$ 上的所有点在 $xOy$ 面上的投影组成的曲线称为 $\Gamma$ 在 $xOy$ 面上的投影。显然曲线 $\Gamma$ 在 $xOy$ 面上的投影就是以 $\Gamma$ 为准线、母线平行于 $z$ 轴的柱面与 $xOy$ 面的交线，这个柱面称为 $\Gamma$ 沿 $z$ 轴的投影柱面。类似地可考虑 $\Gamma$ 在 $xOz$ 面、$yOz$ 面上的投影。

**例3.6** 求曲线 $\Gamma$：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, & (3.36) \\ x^2+y^2-2x=0 & (3.37) \end{cases}$$

在各坐标面上的投影的方程，并且画出曲线 $\Gamma$ 及其在各坐标面上的投影（这条曲线 $\Gamma$ 称为维维安尼曲线）。

**解** $\Gamma$ 沿 $z$ 轴的投影柱面的方程应当不含 $z$，且 $\Gamma$ 上的点应适合这个方程，显然方程(3.37)就符合要求。但是要注意，一般说来，投影柱面可能只是柱面(3.37)的一部分，这要根据曲线 $\Gamma$ 上的点的坐标有哪些限制来决定。对于本题来说，由方程(3.36)知，$\Gamma$ 上的点应满足

$$|x|\leqslant 2, \quad |y|\leqslant 2, \quad |z|\leqslant 2;$$

显然满足方程(3.37)的点均满足这些要求，因此整个柱面(3.37)都是 $\Gamma$ 沿 $z$ 轴的投影柱面，从面 $\Gamma$ 在 $xOy$ 面上的投影的方程是

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0, \\ z=0. \end{cases} \quad (3.38)$$

为了求$\Gamma$沿$y$轴的投影柱面，应当从$\Gamma$的方程中设法得到一个不含$y$的方程，用(3.36)减去(3.37)即得

$$z^2+2x=4. \tag{3.39}$$

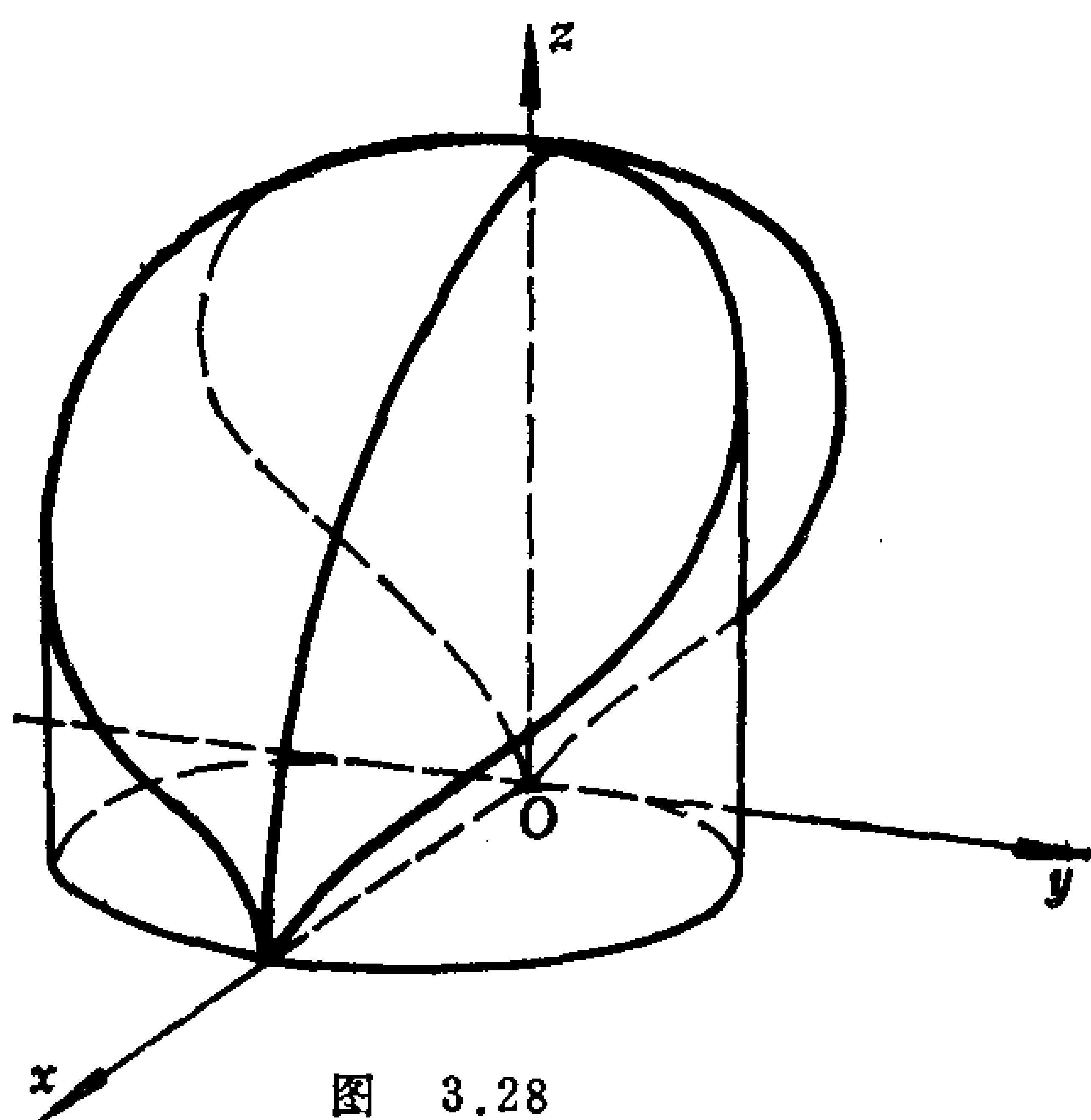



图 3.28

由于$\Gamma$上的点应满足$|z|\leqslant 2$，所以$\Gamma$沿$y$轴的投影柱面只是柱面(3.39)中满足$|z|\leqslant 2$的那一部分，于是$\Gamma$在$xOz$面上的投影的方程是

$$\begin{cases} z^2+2x=4, \\ y=0, \end{cases} \tag{3.40}$$

其中$|z|\leqslant 2$。

类似地可求得$\Gamma$在$yOz$面上的投影的方程为：

$$\begin{cases} 4y^2+(z^2-2)^2=4, \\ x=0. \end{cases} \tag{3.41}$$

$\Gamma$在$xOy$面上的投影是一个圆，在$xOz$面上的投影是抛物线的一段，这两个投影比较好画，因此先画出$\Gamma$的这两个投影，然后就可画出曲线$\Gamma$以及它在$yOx$面上的投影。由于曲线$\Gamma$关于$xOy$面对称，所以我们只画出$xOy$面上方的那一部分（如图3.28）。

**例 3.7** 求曲线$\Gamma$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, & (3.42) \\ 2x - z^2 + 3 = 0 & (3.43) \end{cases}$$

在 $xOy$ 面和 $xOz$ 面上的投影的方程， 并且画出这两个投影和曲线$\Gamma$(在 $xOy$ 面上方的部分)。

**解** 先看 $\Gamma$ 上的点的坐标有哪些限制。从方程(3.42)得：

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|.$$

再代入(3.43)中得：

$$0 = 2x - z^2 + 3 \leqslant 2x - x^2 + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

于是得

$$-1 \leqslant x \leqslant 3.$$

$\Gamma$ 在 $xOy$ 面上的投影为：

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

$\Gamma$ 在 $xOz$ 面上的投影为：

$$\begin{cases} 2x - z^2 + 3 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

其中 $-1 \leqslant x \leqslant 3$。

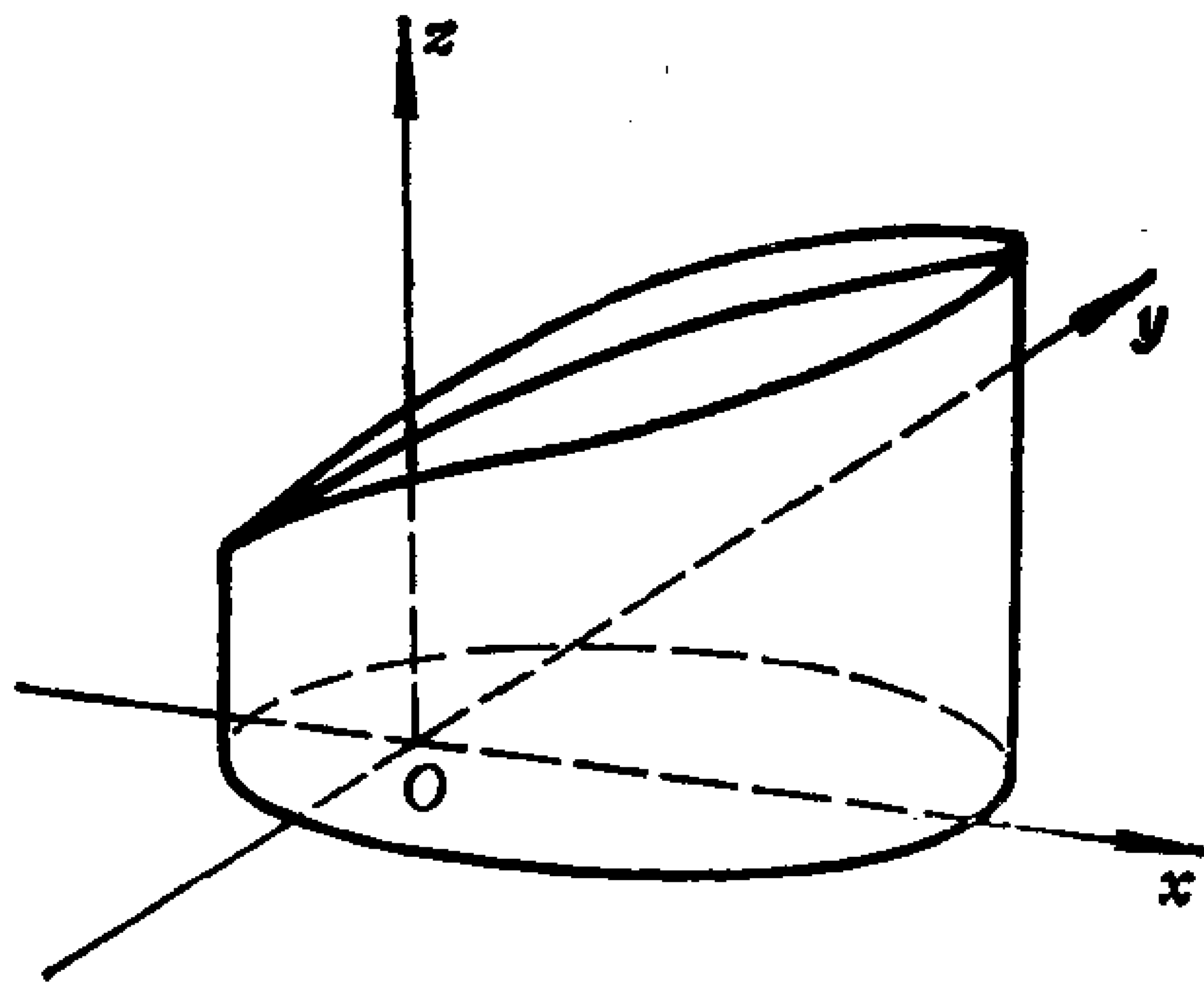



图 3.29

## 5.3 曲面所围成的区域的画法

几个曲面或平面所围成的空间的区域可用几个不等式联立起来表示。如何画出这个区域？关键是要画出相应曲面的交线，随之，所求区域也就表示出来了。

**例3.8** 用不等式组表示出下列曲面或平面所围成的区域，并画图。

$$x^2+y^2=2z,\quad x^2+y^2=4x,\quad z=0.$$

**解** $x^2+y^2=2z$ 是椭圆抛物面，$x^2+y^2=4x$ 是圆柱面，$z=0$ 是 $xOy$ 面。因此它们所围成的区域应当是在 $xOy$ 面上方，在

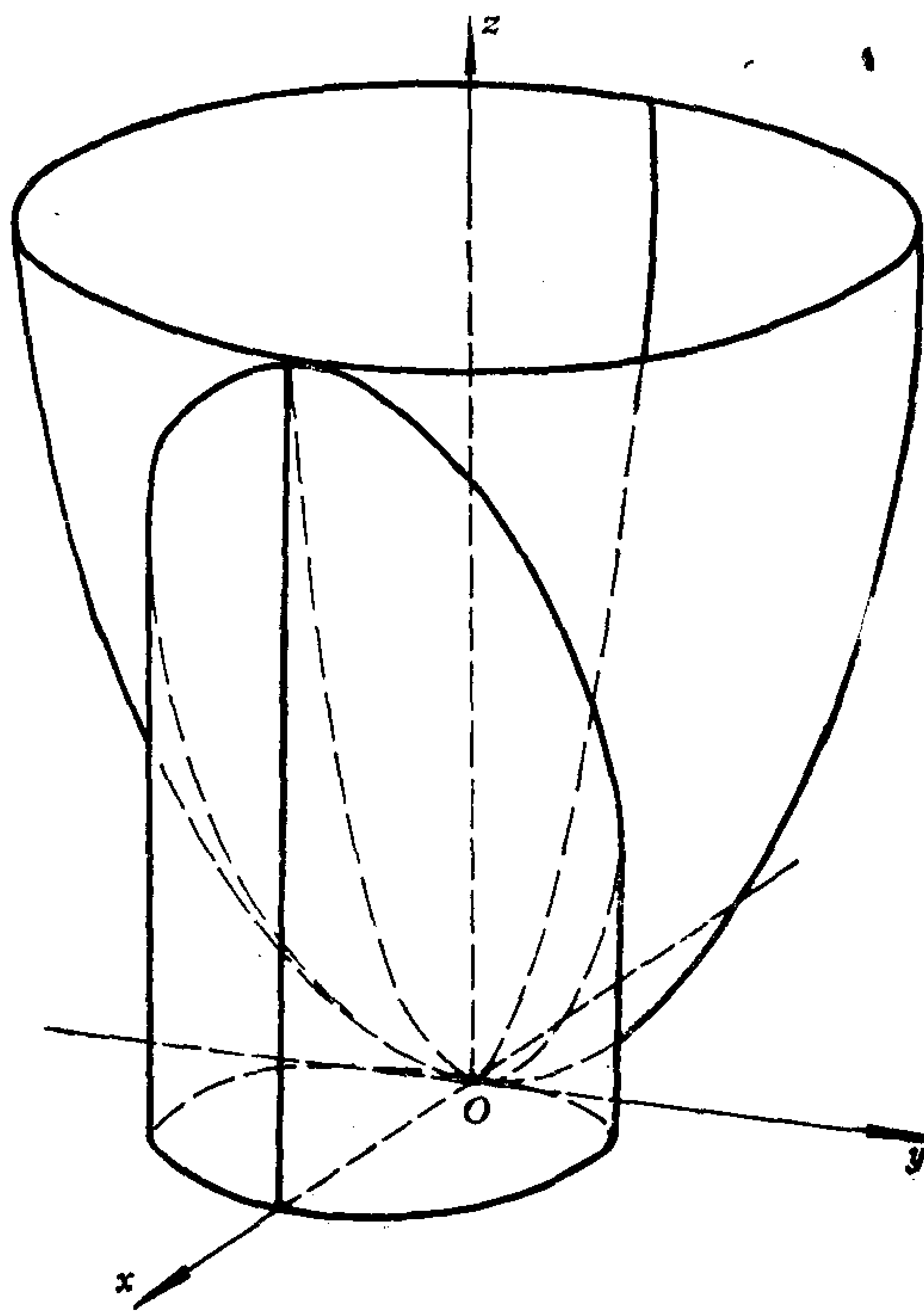



图 3.30

椭圆抛物面下方，在圆柱面里面。于是这个区域可表示成

$$\begin{cases} z \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 2z, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4x. \end{cases} \tag{3.46}$$

为了画出这个区域，关键是要画出椭圆抛物面与圆柱面的交线$\Gamma$：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z, \\ x^2 + y^2 = 4x. \end{cases} \tag{3.47}$$

$\Gamma$在 $xOy$ 面上的投影为：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

$\Gamma$ 在 $xOz$面上的投影为：

$$\begin{cases} z = 2x, \\ y = 0, \end{cases} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4. \tag{3.49}$$

由 $\Gamma$ 的两个投影可画出 $\Gamma$，再画出圆柱面和椭圆抛物面，则所求的区域就画出来了(如图3.30)。

## 习 题 3.5

1. 画出下列曲面。

(1) $x^2 - y = 0$; (2) $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$;

(3) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$; (4) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$;

(5) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = -1$; (6) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 2z$;

(7) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 2z$.

2. 求下列曲线在 $xOy$ 面和 $yOz$ 面上的投影的方程，并

且画出这两个投影和曲线本身。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y^2+z^2=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=2y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5, \\ x^2+y^2=4z. \end{cases}$

3. 求下列曲线在 $xOy$ 面和 $xOz$ 面上的投影的方程，并且画出这两个投影和曲线本身。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ 2x-z^2+1=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x-2=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} z=4-x^2-\dfrac{1}{4}y^2, \\ z=3x^2+\dfrac{1}{4}y^2. \end{cases}$

4. 用不等式组表达下列曲面或平面所围成的空间区域，并且画图。

(1) $x^2+y^2=16$,　$z=x+4$,　$z=0$;

(2) $x^2+y^2=4$,　$y^2+z^2=1$;

(3) $x^2+y^2+z^2=5$,　$x^2+y^2=4z$.

5. 画出下列不等式组表示的区域。

(1) $x^2+y^2\leqslant 1$,　$y^2+z^2\leqslant 1$,　$x\geqslant 0$,　$y\geqslant 0$,　$z\geqslant 0$;

(2) $x^2+y^2\geqslant 4z$,　$x+y\leqslant 1$,　$x\geqslant 0$,　$y\geqslant 0$,　$z\geqslant 0$.

# 第四章　坐 标 变 换

前两章我们是在选定的一个坐标系中研究平面、直线和曲面。但是在许多情形中，往往在事先给定的坐标系中，一个图形的方程比较复杂，这时我们需要选择另一个合适的坐标系，使这个图形的方程变得比较简单。为此就需要研究同一个点在两个坐标系中的坐标之间的关系，这样的关系式称为**坐标变换公式**。本章就是研究坐标变换公式及其应用。

## §1　平面的仿射坐标变换

### 1.1　点的仿射坐标变换公式

平面上给了两个仿射坐标系：$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$和$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$。为说话方便起见，前一个称为旧坐标系，简记作Ⅰ；后一个称为新坐标系，简记作Ⅱ。点$M$(或向量$\boldsymbol{\alpha}$)在Ⅰ中的坐标称为它的Ⅰ坐标(或旧坐标)；在Ⅱ中的坐标称为它的Ⅱ坐标(或新坐标)。为了研究同一个点$M$的Ⅰ坐标与Ⅱ坐标的关系，就首先要明确Ⅰ与Ⅱ的相对位置。

设Ⅱ的原点$O'$的Ⅰ坐标是$(x_0,y_0)$，设Ⅱ的基向量$\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'$的Ⅰ坐标分别是$(a_{11},a_{21}),(a_{12},a_{22})$。现在我们来求点$M$的Ⅰ坐标$(x,y)$与它的Ⅱ坐标$(x',y')$之间的关系。因为

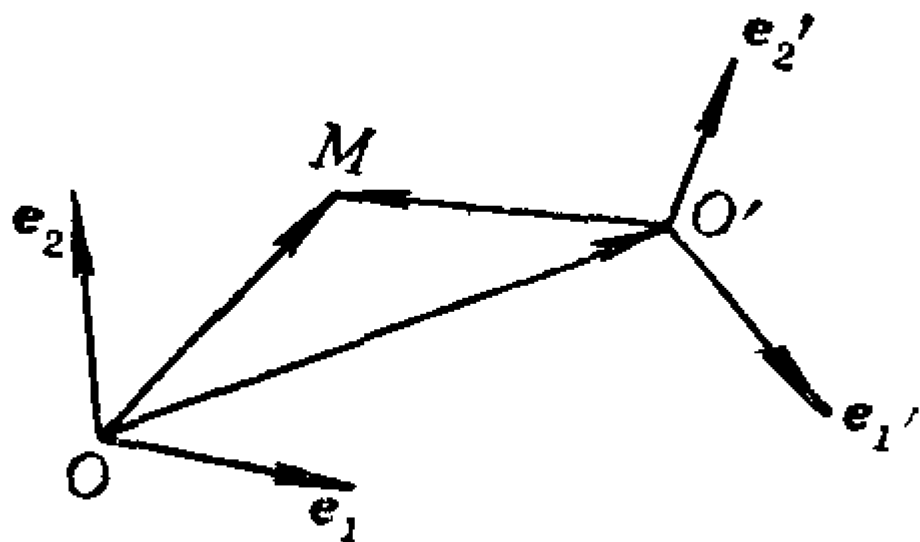



图　4.1

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = (x_0\boldsymbol{e}_1 + y_0\boldsymbol{e}_2) + (x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2) \\
&= (x_0\boldsymbol{e}_1 + y_0\boldsymbol{e}_2) + x'(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2) \\
&\quad + y'(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) \\
&= (a_{11}x' + a_{12}y' + x_0)\boldsymbol{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' + y_0)\boldsymbol{e}_2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{cases}
x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0, \\
y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0.
\end{cases} \tag{4.1}
$$

公式(4.1)称为平面上坐标系Ⅰ到Ⅱ的点的仿射坐标变换公式。它把任意一点$M$的Ⅰ坐标$x,y$表示成它的Ⅱ坐标$x',y'$的一次多项式。

**定理4.1** 平面上点的仿射坐标变换公式(4.1)中的系数行列式不等于零，即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

**证明** 假如(4.1)中系数行列式等于零，则由定理1.4知，$\boldsymbol{e}'_1$与$\boldsymbol{e}'_2$共线，矛盾。所以结论成立。

由于公式(4.1)中系数行列式(记作$d$)不等于零，因此把(4.1)看成$x',y'$的方程组，可以求得唯一解：

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{1}{d}\begin{vmatrix} x - x_0 & a_{12} \\ y - y_0 & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{d}(a_{22}x - a_{12}y - a_{22}x_0 + a_{12}y_0), \\
y' = \dfrac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & x - x_0 \\ a_{21} & y - y_0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{d}(-a_{21}x + a_{11}y + a_{21}x_0 - a_{11}y_0).
\end{cases} \tag{4.2}
$$

公式(4.2)是把平面上任意一点$M$的Ⅱ坐标$x',y'$表示成它的Ⅰ坐标$x,y$的一次多项式，称它是Ⅱ到Ⅰ**的点的仿射坐标变换公式**。

## 1.2 向量的仿射坐标变换公式

现在来看平面上的向量$\boldsymbol{m}$的Ⅰ坐标$(u,v)$与它的Ⅱ坐标

$(u', v')$之间的关系。设 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{M_1M_2}$，其中 $M_i$ 的 Ⅰ 坐标为 $(x_i, y_i)$，Ⅱ坐标为$(x'_i, y'_i)$，$i=1,2$。则有

$$
\begin{aligned}
u &= x_2 - x_1 = (a_{11}x'_2 + a_{12}y'_2 + x_0) - (a_{11}x'_1 + a_{12}y'_1 + x_0) \\
&= a_{11}(x'_2 - x'_1) + a_{12}(y'_2 - y'_1) = a_{11}u' + a_{12}v', \\
v &= y_2 - y_1 = (a_{21}x'_2 + a_{22}y'_2 + y_0) - (a_{21}x'_1 + a_{22}y'_1 + y_0) \\
&= a_{21}u' + a_{22}v',
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{cases}
u = a_{11}u' + a_{12}v', \\
v = a_{21}u' + a_{22}v'.
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

(4.3)称为平面上坐标系Ⅰ到Ⅱ的**向量的仿射坐标变换公式**，它把任一向量 $\boldsymbol{m}$ 的Ⅰ坐标$u,v$表示成它的Ⅱ坐标$u',v'$的一次齐次多项式(即没有常数项)，这是与点的坐标变换公式不同的地方。平面上的点和向量是有本质区别的两种对象，如果只从一个坐标系来看，则点和向量的坐标都是有序实数偶，看不出点和向量的区别；但是如果取两个仿射坐标系(它们的原点不重合)，通过坐标变换，则点和向量的区别就明显了：点的坐标变换公式(4.1)中有常数项，而向量的坐标变换公式(4.3)中没有常数项。

由于(4.3)中系数行列式不为零，因此可反解出：

$$
\begin{cases}
u' = \dfrac{1}{d}(a_{22}u - a_{12}v), \\
v' = \dfrac{1}{d}(-a_{21}u + a_{11}v).
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

这是Ⅱ到Ⅰ的向量的仿射坐标变换公式。由(4.4)看出，Ⅰ的基向量$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$的Ⅱ坐标分别是

$$
\left(\frac{a_{22}}{d},\ -\frac{a_{21}}{d}\right),\ \left(-\frac{a_{12}}{d},\ \frac{a_{11}}{d}\right).
$$

## 习 题 4.1

1．对平行四边形$ABCD$取仿射坐标系Ⅰ为$[A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]$，

Ⅱ为$[C;\ \overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}]$.求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式；并且求$A,D,\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}$的Ⅰ坐标和Ⅱ坐标。

2． 设$ABCDEF$为正六边形，取仿射坐标系Ⅰ为$[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}]$，Ⅱ为$[D;\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DF}]$.求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式；求各顶点的Ⅰ坐标和Ⅱ坐标；求$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{BE}$的Ⅰ坐标和Ⅱ坐标。

3． 设仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x=-y'+3, \\ y=x'-2. \end{cases}$$

(1) 求Ⅱ的原点$O'$的Ⅰ坐标，Ⅱ的基向量$e_1,e'_2$的Ⅰ坐标；求Ⅰ的原点$O$的Ⅱ坐标，基向量$e_1,e_2$的Ⅱ坐标；

(2) 求直线$l_1$：$2x-y+1=0$在坐标系Ⅱ中的方程；

(3) 求直线$l_2$：$3x'+2y'-5=0$在坐标系Ⅰ中的方程。

## §2 矩阵及其运算

### 2.1 矩阵的概念以及矩阵的运算

为了使坐标变换公式易于记忆并且简化计算和证明，我们把向量的坐标变换公式(4.3)中的系数按原来顺序排成一张2行、2列的表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

称它为一个2×2矩阵。一般地，有

**定义4.1** $s\cdot n$个实数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,\cdots,n)$排成的$s$行、$n$列的一张表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵**。

矩阵通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，譬如矩阵(4.5)可简记成 $A$ 或 $A_{s\times n}$ 或 $(a_{ij})_{s\times n}$。$A$ 的位于第 $i$ 行第 $j$ 列交叉处的元素称为 $A$ 的 $(i,j)$ 元。

$n\times n$ 矩阵也称为 $n$ 级矩阵或 $n$ 级方阵。

元素全为零的 $s\times n$ 矩阵称为 $s\times n$ **零矩阵**，记作 $0_{s\times n}$ 或 0。

**定义4.2** 两个矩阵 $A$ 和 $B$，如果它们的行数相同，列数也相同，并且对应元素都相等，则称它们是**相等的矩阵**，记作 $A=B$。

矩阵不是一个数，而是由一些数组成的一张表，但是基于许多实际问题的背景，使我们可以给矩阵规定几种运算。

（一）矩阵的加法和数量乘法

**定义4.3** 若 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 都是 $s\times n$ 矩阵，则

$$A+B:=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix},$$

这种运算称为矩阵的**加法**。

**定义4.4** 若 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$k$ 是实数，则

$$kA:=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{s1} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix},$$

这种运算称为矩阵的**数量乘法**。

矩阵 $(-a_{ij})$ 称为矩阵 $A=(a_{ij})$ 的**负矩阵**，记作 $-A$。

若 $A,B$ 都是 $s\times n$ 矩阵，则

$$A-B:=A+(-B),$$

这称为矩阵的**减法**。

容易用定义直接验证，矩阵的加法和数量乘法满足下述规律：对于任意 $s\times n$ 矩阵 $A,B,C$，任意实数 $k,l$，有

(1) $A+B=B+A$;　(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) $A+0=A$;　(4) $A+(-A)=0$;

(5) $1\cdot A=A$;　(6) $k(lA)=(kl)A$;

(7) $(k+l)A=kA+lA$;　(8) $k(A+B)=kA+kB$.

**(二)矩阵的乘法**

为了能把向量的坐标变换公式(4.3)用矩阵的形式简洁地表示出来，我们规定矩阵的第三种运算如下：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} a_{11}u'+a_{12}v' \\ a_{21}u'+a_{22}v' \end{pmatrix},$$

这种运算称为矩阵的**乘法**，它是把左矩阵的第 $i$ 行与右矩阵的第 $j$ 列的对应元素的乘积之和作为乘积矩阵的$(i,j)$元，$i=1,2$；$j=1,2$。由此看出，只有左矩阵的列数与右矩阵的行数相同的两个矩阵才能做乘法运算；并且乘积矩阵的行数等于左矩阵的行数，乘积矩阵的列数等于右矩阵的列数。一般地，有

**定义4.5**　设$A=(a_{ij})$是$s\times n$矩阵，$B=(b_{ij})$是$n\times r$矩阵，则规定$A$乘以$B$得到一个$s\times r$矩阵(记作$AB$)，$AB$的$(i,j)$元是$A$的第$i$行与$B$的第$j$列的对应元素乘积之和，即

$$AB\text{ 的}(i,j)\text{ 元}:=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\tag{4.6}$$

其中$i=1,2,\cdots,s$；$j=1,\cdots,r$。

例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+3\times0 & 1\times4+3\times5 \\ 0\times2+6\times0 & 0\times4+6\times5 \\ 7\times2+0\times0 & 7\times4+0\times5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 30 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}.$$

利用矩阵的乘法和两个矩阵相等的定义，我们可以把向量的

坐标变换公式(4.3)写成下述形式：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

再利用矩阵的加法，还可以把点的坐标变换公式(4.1)写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

其中矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

称为坐标系Ⅰ到Ⅱ的**过渡矩阵**，它的第1列是Ⅱ的第一个基向量$\boldsymbol{e}_1'$的Ⅰ坐标，第2列是$\boldsymbol{e}_2'$的Ⅰ坐标。

只有1列的矩阵称为列矩阵(简称为列)，常用希腊字母$\alpha$，$\beta,\gamma,\cdots$表示列。

如果令

$$\gamma = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

则公式(4.7)，(4.8)可分别写成简洁的形式如下：

$$\gamma = A\gamma', \tag{4.7$'$}$$

$$\alpha = A\alpha' + \alpha_0. \tag{4.8$'$}$$

矩阵的乘法适合下列规律：对于任意矩阵$A,B,C$(要求它们能做下述运算)，任意实数$k$，有

(1) $(AB)C = A(BC)$(乘法的结合律)；

(2) $A(B+C) = AB + AC$(左分配律)；

(3) $(B+C)A = BA + CA$(右分配律)；

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$(乘法与数乘关系)。

但是要特别注意，矩阵的乘法不适合交换律。例如，设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

上述例子还说明：$A\neq 0$，$B\neq 0$，但是有可能$AB=0$。因此，从$AB=0$，$A\neq 0$，推不出$B=0$。进而从$AB=AC$，$A\neq 0$，推不出$B=C$。

主对角线(从左上角到右下角)上的元素全为1，并且其余元素全为零的$n$级矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

称为$n$级**单位矩阵**，记作$E_n$或$E$。容易看出，有

$$A_{s\times n}E_n=A_{s\times n},\quad E_sA_{s\times n}=A_{s\times n}.$$

特别地，对于任意$n$级矩阵$A$，有

$$EA=AE=A.$$

### （三）矩阵的转置

**定义4.6** 把一个矩阵$A_{s\times n}$的行、列互换得到的矩阵称为$A$的**转置**，记作$A^t$(或$A'$)。

例如，设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

则

$$A^t=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\\5&4\end{pmatrix}.$$

显然，若$A$是$s\times n$矩阵，则$A^t$是$n\times s$矩阵，并且有

$$A^t\text{的}(i,j)\text{元}=A\text{的}(j,i)\text{元}.$$

矩阵的转置满足下列规律：

(1) $(A^t)^t=A$;　　(2) $(A+B)^t=A^t+B^t$;

(3) $(kA)^t=kA^t$;　　(4) $(AB)^t=B^tA^t$.

特别要注意(4)。举一个例子，设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\16&11\\28&19\end{pmatrix},$$

$$(AB)^t=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix};$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&16&28\\1&11&19\end{pmatrix}.$$

**定义4.7**　$n$级矩阵$A$如果满足：$A^t=A$，则称$A$是对称矩阵。

显然，若$A$是对称矩阵，则

$$A\text{的}(i,j)\text{元}=A\text{的}(j,i)\text{元}.$$

例如，矩阵

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a&b&c\\b&e&d\\c&d&f\end{pmatrix}$$

都是对称矩阵。

## 2.2 矩阵的分块

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

若令

$$\beta=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},$$

则可以把$A$写成下述形式：

$$A=\begin{pmatrix}E_2 & \beta\\ 0_{1\times 2} & 4E_1\end{pmatrix}.$$

象这样把一个矩阵看成由若干个小矩阵组成，称为**矩阵的分块**。它的好处是：使得矩阵的结构更明显清楚，并且使矩阵的运算可以通过这些小矩阵进行，从而可以简化矩阵的计算和证明。例如，再设

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix},$$

令

$$\delta=\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix},$$

则

$$B=(E_2,\delta).$$

直接用矩阵的乘法定义得

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 22\\ 0 & 1 & 31\end{pmatrix};$$

如果我们把小矩阵当作"数"看待采用矩阵乘法法则，得

$$BA=(E_2,\delta)\begin{pmatrix}E_2 & \beta\\ 0 & 4E_1\end{pmatrix}=(E_2,\beta+4\delta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 22\\ 0 & 1 & 31\end{pmatrix},$$

这与前述结果一致。因此，在计算 $BA$ 时，我们确实可以先把矩阵 $A$，$B$ 分块，然后把小矩阵当作"数"看待采用矩阵乘法法则，这称为矩阵的分块乘法。当然，为了使矩阵的分块乘法能够进行，必须使左矩阵的列的分法与右矩阵的行的分法一致，即，左矩阵的列组数应等于右矩阵的行组数，并且左矩阵的每个列组所含列数应等于右矩阵的相应行组所含行数。

利用矩阵的分块乘法，若矩阵 $B$ 的 $m$ 列依次记为：$B^{(1)}$，$B^{(2)},\cdots,B^{(m)}$，则有

$$AB=(A)(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})=(AB^{(1)},AB^{(2)},\cdots,AB^{(m)}). \tag{4.9}$$

若矩阵 $A$ 的 $s$ 行依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$，则有

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix}(B)=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\\\vdots\\A_sB\end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

类似地可讨论矩阵的分块加法，分块数乘和分块转置。譬如，若

$$A=\begin{pmatrix}E_2 & \beta\\ 0_{1\times 2} & 4E_1\end{pmatrix},$$

则

$$A^t=\begin{pmatrix}E_2 & 0_{2\times 1}\\ \beta^t & 4E_1\end{pmatrix}.$$

## 2.3 方阵的行列式

对于一个 2 级或 3 级方阵 $A=(a_{ij})$，它的元素按原来顺序可以组成一个 2 级或 3 级行列式，称为**方阵 $A$ 的行列式**，记作 $|A|$。在高等代数课程里，我们将把行列式概念推广到 $n$ 级行列式，从而对于 $n(n>3)$ 级方阵，也可以谈论它的行列式。

若 $|A|\neq 0$，则称 $A$ 是**非奇异**的；否则称为**奇异**的。

由定理4.1知，仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵$A$是非奇异的。

**定理4.2** 若$A$和$B$都是$n$级矩阵，则

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

**证明** 我们只证$n=2$的情形，至于一般的$n$，在高等代数课程中我们再证明。设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，则

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}\end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{vmatrix}$$

$$= 0 + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21}\end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + 0$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

$$= |A| \cdot |B|.$$

## 2.4 可 逆 矩 阵

(4.7)′式把向量$\boldsymbol{m}$的Ⅰ坐标$\gamma$表示成它的Ⅱ坐标$\gamma'$的一次齐次多项式。我们又知道，由于$|A| \neq 0$，因此可以通过解方程组把$\boldsymbol{m}$的Ⅱ坐标$\gamma'$表示成它的Ⅰ坐标$\gamma$的一次齐次多项式。如果我们引进可逆矩阵的概念，则这一反解过程可以简明地表示出来。

**定义4.8** 若对于$n$级矩阵$A$，存在矩阵$B$，使得

$$AB = BA = E, \tag{4.11}$$

则称$A$是**可逆矩阵**，称$B$是$A$的**逆矩阵**。

不难看出，满足(4.11)的矩阵$B$必是$n$级矩阵，并且它是唯一的。通常把$A$的逆矩阵记作$A^{-1}$。

由定义4.8立即看出，若$A$可逆，则$A^{-1}$也可逆，并且

$$(A^{-1})^{-1}=A. \tag{4.12}$$

**定理4.3** 矩阵$A$可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$(即，$A$非奇异)。

**证明** 必要性。若矩阵$A$可逆，则有$AA^{-1}=E$。于是有$|AA^{-1}|=|E|$，从而$|A||A^{-1}|=1$(这里用到了$|E|=1$这一事实，若$n=2$或3，读者可直接验证它；若$n>3$，在高等代数课程中将证明它)。因此$|A|\neq 0$。

充分性。这里只证$n=2$的情形，至于$n>2$的情形证明思想一样，但放在高等代数课程中证。设$A=(a_{ij})$是2级矩阵，且$|A|\neq 0$。令

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

则

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}=|A|E,$$

同理有$A^*A=|A|E$。从而有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E,$$

所以$A$可逆，并且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*. \tag{4.14}$$

用可逆矩阵的概念及定理4.3，我们得知仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵$A$是可逆矩阵，因此从(4.7)′式立即得到

$$\gamma'=A^{-1}\gamma.$$

由定理4.3还可得到

**命题4.1** 若对于方阵$A$，存在方阵$B$，使得$AB=E$，则$A$是可逆矩阵，并且$A^{-1}=B$。

**证明** 因为$AB=E$，所以$|A||B|=1$，从而$|A|\neq 0$，因此

$A$可逆。于是 $A^{-1}$ 存在，在 $AB=E$ 的两边左乘 $A^{-1}$ 得

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}E,$$

即得 $B=A^{-1}$。

利用命题4.1容易证明可逆矩阵的下述性质：

(1) 若$A,B$均是$n$级可逆矩阵，则 $AB$ 也可逆，并且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

(2) 若$A$可逆，则 $A^t$ 也可逆，并且

$$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t.$$

(3) 若$A$可逆，则

$$|A^{-1}|=|A|^{-1}.$$

## 2.5 正交矩阵

**定义4.9** 若一个$n$级矩阵$A$适合

$$AA^t=E,$$

则称$A$是**正交矩阵**。

例如，$E$是正交矩阵；又如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

都是正交矩阵。

由命题4.1立即得到

**命题4.2** $n$级矩阵$A$是正交矩阵的充分必要条件为

$$A^{-1}=A^t.$$

从而也有$n$级矩阵$A$是正交矩阵的充分必要条件为

$$A^tA=E.$$

容易证明正交矩阵有下述性质：

(1) 若$A,B$都是$n$级正交矩阵，则 $AB$ 也是正交矩阵；

(2) 若$A$是正交矩阵，则$A'$(即$A^{-1}$)也是正交矩阵；

(3) 若$A$是正交矩阵，则$|A|=1$或$-1$(在证明这条性质时，要用到$|A'|=|A|$这一事实)。

**命题4.3** $A$是正交矩阵的充分必要条件为：$A$的每一行元素的平方和等于1，每两行对应元素的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \qquad i=1,2,\cdots,n; \tag{4.15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0, \quad i \neq j. \tag{4.16}$$

**证明** 对于任一$n$级矩阵$A=(a_{ij})$都有

$$(AA')\text{的}(i,j)\text{元} = \sum_{k=1}^{n}[A\text{的}(i,k)\text{元}]\cdot[A'\text{的}(k,j)\text{元}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk},$$

类似地有

$$(A'A)\text{的}(i,j)\text{元} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}.$$

现在设$A$是正交矩阵，则$AA'=E$。于是得

$$\begin{aligned} &(AA')\text{的}(i,i)\text{元}=1, \qquad i=1,2,\cdots,n; \\ &(AA')\text{的}(i,j)\text{元}=0, \qquad i\neq j. \end{aligned} \tag{4.17}$$

从而得(4.15)和(4.16)。

反之，若对于矩阵$A$，(4.15)和(4.16)成立，则得(4.17)，从而$AA'=E$，即$A$为正交矩阵。

类似地可证明

**命题4.4** $A$是正交矩阵的充分必要条件为：$A$的每一列元素的平方和等于1，每两列对应元素的乘积之和等于零。

## 习　题　4.2

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 7\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 7\end{pmatrix},$$

求 $A+B$，$A-B$，$5A^t+3B^t$。

2. 计算

(1) $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}7 & -1\\ -2 & 5\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -5 & 2\end{pmatrix}$；　(6) $(-1,3,2)\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 7\end{pmatrix}$；

(7) $\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 7\end{pmatrix}(-1,3,2)$；　(8) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

3. 判断下列矩阵是否可逆？若可逆，求它的逆矩阵。

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & 6\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，其中 $ad-bc\neq 0$。

4. 证明可逆矩阵的性质(1)，(2)，(3)。

5. 判断下列矩阵是否正交矩阵。

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

6. 证明正交矩阵的性质(1),(2),(3)。

## §3 平面直角坐标变换

设 I$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，II$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]$都是直角坐标系，本章§1和§2中关于仿射坐标变换的一般结论和方法对于直角坐标变换都成立。本节来进一步研究直角坐标变换的特殊性。

### 3.1 直角坐标变换公式

设 $O'$ 的 I 坐标为$(x_0,y_0)$，$\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 的 I 坐标分别为$(a_{11},a_{21})$，$(a_{12},a_{22})$。则 I 到 II 的过渡矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

**定理4.4** 设 I 和 II 都是直角坐标系，则 I 到 II 的过渡矩阵 $A$ 是正交矩阵；并且 II 到 I 的过渡矩阵是 $A^t$。

**证明** 因为$|\boldsymbol{e}'_1|=1$，$|\boldsymbol{e}'_2|=1$，$\boldsymbol{e}'_1\perp\boldsymbol{e}'_2$，并且 I 是直角坐标系，所以有

$$a_{11}^2+a_{21}^2=1,\quad a_{12}^2+a_{22}^2=1,\quad a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0. \qquad (4.18)$$

由命题4.4知，$A$ 是正交矩阵。

II 到 I 的过渡矩阵为 $A^{-1}$，由于$A$是正交矩阵，所以 $A^{-1}=A^t$。

I 到 II 的点的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}. \qquad (4.19)$$

于是，II 到 I 的点的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}. \qquad (4.20)$$

I 到 II 的向量的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}. \qquad (4.21)$$

Ⅱ到Ⅰ的向量的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

### 3.2 直角坐标变换中的过渡矩阵

直角坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵$A$虽然有四个数，但是由于它是正交矩阵，满足(4.18)中的三个方程，因此只有一个数是自由的。下面来详细讨论这点。

平面上的仿射坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$称为右手系，如果从$\boldsymbol{e}_1$反时针旋转小于180°的角便与$\boldsymbol{e}_2$重合。反之称为左手系。对于直角坐标系来说，若$\boldsymbol{e}_1$旋转90°与$\boldsymbol{e}_2$重合，则为右手系；若$\boldsymbol{e}_1$旋转$-90°$与$\boldsymbol{e}_2$重合，则为左手系。

设Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]$都是右手直角坐标系，

$$O'(x_0,y_0),\quad \boldsymbol{e}'_1(a_{11},a_{21}),\quad \boldsymbol{e}'_2(a_{12},a_{22}).$$

则有

$$a_{11}=\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\cos\langle\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_1\rangle,\quad a_{21}=\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\langle\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_2\rangle,$$
$$a_{12}=\boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_1=\cos\langle\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_1\rangle,\quad a_{22}=\boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\langle\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_2\rangle.$$

设$\boldsymbol{e}_1$反时针旋转$\theta$角便与$\boldsymbol{e}'_1$重合(如图4.2)，分别讨论

$$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi,\quad \pi\leqslant\theta<\frac{3\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}\leqslant\theta<2\pi$$

这四种情况，可得

$$a_{11}=\cos\langle\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_1\rangle=\cos\theta,$$
$$a_{21}=\cos\langle\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\sin\theta,$$
$$a_{12}=\cos\langle\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_1\rangle=-\sin\theta,$$
$$a_{22}=\cos\langle\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}_2\rangle=\cos\theta.$$

从而Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

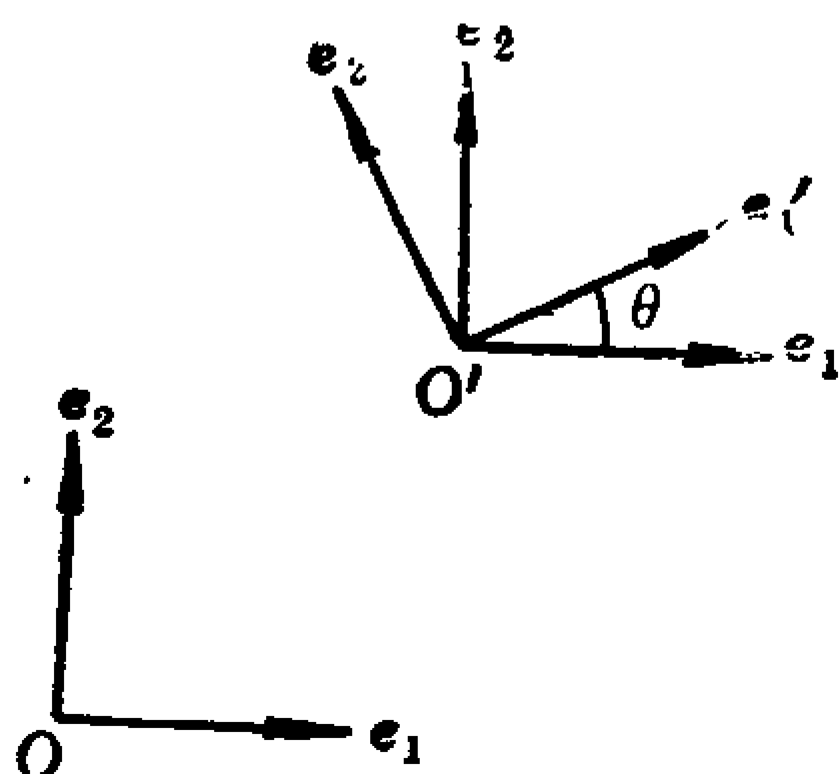



图 4.2

容易算出，$|A|=1$。

* 读者可类似上述讨论得到：设 $\theta$ 仍表示 $e_1$ 到 $e_1'$ 的转角，若 I 是右手直角坐标系，II 是左手直角坐标系，则 I 到 II 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

若 I 是左手直角坐标系，II 是右手直角坐标系，则 I 到 II 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

若 I 和 II 都是左手直角坐标系，则 I 到 II 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

**定义4.10** 平面(或空间)的两个坐标系，如果它们都是右手系，或者它们都是左手系，则称它们是**同定向的**；如果一个是左手系，另一个是右手系，则称它们是**反定向的**。

从上面的讨论可以得到

**命题4.5** 设 I 和 II 都是平面的直角坐标系，设 I 到 II 的过渡矩阵是 $A$，则 I 和 II 同定向的充分必要条件为 $|A|=1$；从而它们是反定向的充分必要条件为 $|A|=-1$。

如无特别声明，今后所取的直角坐标系都是右手系。

### 3.3 移轴公式和转轴公式

设 I$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 和 II$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$ 都是右手直角坐标系，$O'(x_0,y_0)$，$\boldsymbol{e}_1$ 到$\boldsymbol{e}_1'$的转角为 $\theta$，则 I 到 II 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad (4.23)$$

若 $\theta=0$，则(4.23)成为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x=x'+x_0, \\ y=y'+y_0. \end{cases} \qquad (4.24)$$

(4.24)就是移轴公式。

若 $O'$ 与 $O$ 重合，则(4.23)成为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad (4.25)$$

(4.25)称为转轴公式。

(4.23)，(4.24)，(4.25)说明，平面上任一右手直角坐标变换可以经过移轴和转轴得到，即对于右手直角坐标系 I$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 和 II$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$，有

$$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\xrightarrow{\text{移轴}}[O';\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\xrightarrow{\text{转轴}}[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'];$$

或

$$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\xrightarrow{\text{转轴}}[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']\xrightarrow{\text{移轴}}[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'].$$

上述结论对于任意两个同定向的直角坐标系仍成立；但对于反定向的两个直角坐标系不成立。

### 3.4 例

**例4.1** 在平面上，设 $x'$ 轴，$y'$ 轴在原坐标系中的方程分别为：

$$3x-4y+1=0,\quad 4x+3y-7=0,$$

且新、旧坐标系都是右手直角坐标系。求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式，直线 $l_1$：$2x-y+3=0$ 在新坐标系中的方程；直线 $l_2$：$x'+2y'-1=0$ 在原坐标系中的方程。

**解** 设原坐标系为Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，新坐标系为Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]$。解方程组

$$\begin{cases}3x-4y+1=0,\\4x+3y-7=0\end{cases}$$

得 $x=1,y=1$。因此，$O'$ 的Ⅰ坐标是$(1,1)$。

因为 $x'$ 轴的标准方程为：

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{4}=\frac{y}{3},$$

所以 $x'$ 轴的方向系数为$(4,3)$，于是 $\boldsymbol{e}'_1$ 的Ⅰ坐标为$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$或者$\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$。下面取 $\boldsymbol{e}'_1$ 的Ⅰ坐标为$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$，则由(4.23)得Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

$l_1$：$2x-y+3=0$ 在新坐标系中的方程为：

$$2\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'+1\right)-\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'+1\right)+3=0,$$

即
$$x'-2y'+4=0.$$

Ⅱ到Ⅰ的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

$l_2$：$x' + 2y' - 1 = 0$ 在原坐标系中的方程为：

$$\left[\frac{4}{5}(x-1) + \frac{3}{5}(y-1)\right] + 2\left[-\frac{3}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y-1)\right] - 1 = 0,$$

即
$$2x - 11y + 14 = 0.$$

**例4.2** 在平面右手直角坐标系中，求分式线性函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ 其中 } ad \neq bc, \ c \neq 0$$

的图象。

**解** 先将所给函数适当变形，从而看出应怎样作坐标变换才能使此图形的方程简单。

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c} - \frac{d}{c}\right) + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}},$$

于是得

$$\left(y - \frac{a}{c}\right)\left(x + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc-ad}{c^2}.$$

从而看出只要作移轴

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{d}{c}, \\ y' = y - \dfrac{a}{c}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = x' - \dfrac{d}{c}, \\ y = y' + \dfrac{a}{c}, \end{cases}$$

则该图形在新坐标系(其原点 $O'$ 的旧坐标为 $(-d/c,\ a/c)$)中的方程为

$$x'y' = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

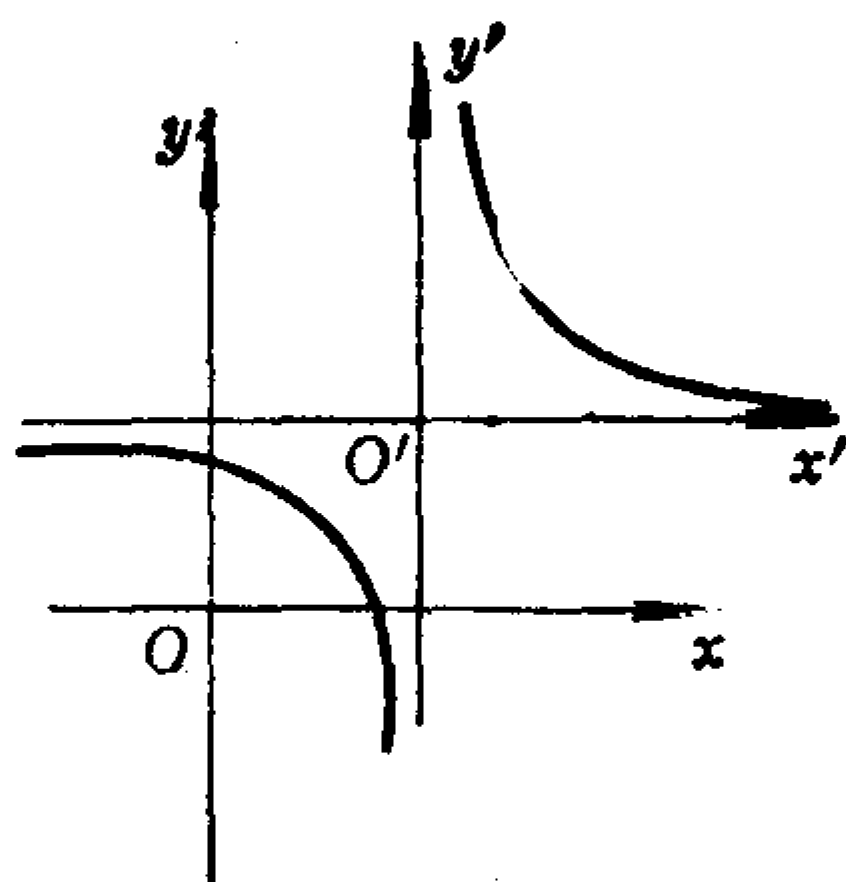


图 4.3

这是以新坐标系的 $x'$ 轴，$y'$ 轴为渐近线的等轴双曲线。$x'$ 轴，$y'$ 轴在原坐标系中的方程分别为：

$$y - \frac{a}{c} = 0,\quad x + \frac{d}{c} = 0.$$

## 习 题 4.3

1. 在直角坐标系 $Oxy$ 中，以直线 $l$：$4x - 3y + 12 = 0$ 为新坐标系的 $x'$ 轴，取通过点 $A(1,-3)$ 且垂直于 $l$ 的直线为 $y'$ 轴，写出点的坐标变换公式；并且求直线 $l_1$：$3x - 2y + 5 = 0$ 在新坐标系中的方程。

2. 设 $x'$ 轴和 $y'$ 轴在原直角坐标系中的方程分别为：

$$12x - 5y - 2 = 0 \text{ 和 } 5x + 12y - 29 = 0.$$

写出点的坐标变换公式；并且求点 $A(-2,0)$ 的新坐标。设某椭圆的长轴、短轴分别在 $x'$ 轴、$y'$ 轴上，其长、短半轴的长分别为3、2，求这个椭圆在原坐标系中的方程。

3. 如果坐标系 I 和 II 都是右手直角坐标系，且 II 的原点 $O'$ 的 I 坐标是(1,2)，$e_1$ 到 $e_1'$ 的转角是 $\frac{\pi}{3}$，求 I 的原点 $O$ 的 II 坐标以及直线 $l$：$x - y = 1$ 在 II 中的方程。

4. 作直角坐标变换，已知点 $A(6,-5)$，$B(1,-4)$ 的新坐标分别为 $(1,-3)$，$(0,2)$，求点的坐标变换公式。

5. 在直角坐标系 $Oxy$ 中，已知三点 $A(2,1)$，$B(-1,2)$，

$C(1,-3)$；如果将坐标原点移到$B$点，并且坐标轴旋转角度$\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$，求点的坐标变换公式；并且求$A,B,C$在新坐标系中的坐标。

6. 设新旧坐标系都是右手直角坐标系，坐标变换公式为：

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+5, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x'=-y+3, \\ y'=x-2. \end{cases}$

其中$(x,y)$与$(x',y')$分别表示同一个点的旧坐标与新坐标，求新坐标系的原点的旧坐标，并且求坐标轴旋转的角$\theta$。

7. 已知一曲线在给定的右手直角坐标系中的方程为

$$y=4x^2-8x+5,$$

试作一直角坐标变换，使这条曲线的新方程中不含有$x$的一次项以及常数项，并且作图。

8. 求分式线性函数

$$y=\frac{2x+3}{x+4}$$

的图象，并且画图。

9. 在右手直角坐标系$Oxy$中，设一抛物线的对称轴是：$x-y-z=0$，顶点是$(4,2)$，焦点是$(2,0)$，求它的方程。

10. 已知一抛物线的准线$l$的方程为：$x-y+2=0$，焦点为$F(2,0)$，求这抛物线的方程，其中$Oxy$是右手直角坐标系。

11. 在右手直角坐标系$Oxy$中，已知一个椭圆的长轴和短轴分别在直线$l_1$：$x+y=0$和$l_2$：$x-y+1=0$上，并且这椭圆的半轴长为$a=2,b=1$，求这个椭圆的方程。

12. 在右手直角坐标系$Oxy$中，求经过点$A(-2,-1)$和$B(0,-2)$，并且长轴和短轴分别在直线$l_1$：$x-y+1=0$和$l_2$：$x+y+1=0$上的椭圆的方程。

*13. 在右手直角坐标系Ⅰ中，设两直线 $l_i$:

$$A_ix+B_iy+C_i=0\quad(i=1,2)$$

互相垂直，取 $l_1,l_2$ 为右手直角坐标系Ⅱ的 $O'y'$ 轴、$O'x'$ 轴，试求Ⅱ到Ⅰ的点的坐标变换公式。

## §4 空间坐标变换

### 4.1 仿射坐标变换

**定理4.5** 若Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$都是空间的仿射坐标系，设 $O'$ 的Ⅰ坐标是 $(x_0,y_0,z_0)$；设 $\boldsymbol{e}_j'$ 的Ⅰ坐标是 $(a_{1j},a_{2j},a_{3j})$，$j=1,2,3$。则Ⅰ到Ⅱ的点的仿射坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix};\tag{4.28}$$

Ⅰ到Ⅱ的向量的仿射坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{pmatrix};\tag{4.29}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

称为Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵，它的第 $j$ 列是 $\boldsymbol{e}_j'$ 的Ⅰ坐标$(j=1,2,3)$。

**证明** 设点$M$的Ⅰ坐标为 $(x,y,z)$，Ⅱ坐标为$(x',y',z')$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\\&=(x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+z_0\boldsymbol{e}_3)+(x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'+z'\boldsymbol{e}_3')\\&=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+z_0\boldsymbol{e}_3+x'(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+a_{31}\boldsymbol{e}_3)\\&\quad+y'(a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{32}\boldsymbol{e}_3)+z'(a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2+a_{33}\boldsymbol{e}_3)\\&=(x_0+a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z')\boldsymbol{e}_1+(y_0+a_{21}x'+a_{22}y'\end{aligned}$$

$$+a_{23}z')\boldsymbol{e}_2+(z_0+a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z')\boldsymbol{e}_3$$

从而得

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+x_0,\\ y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+y_0,\\ z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+z_0.\end{cases}$$

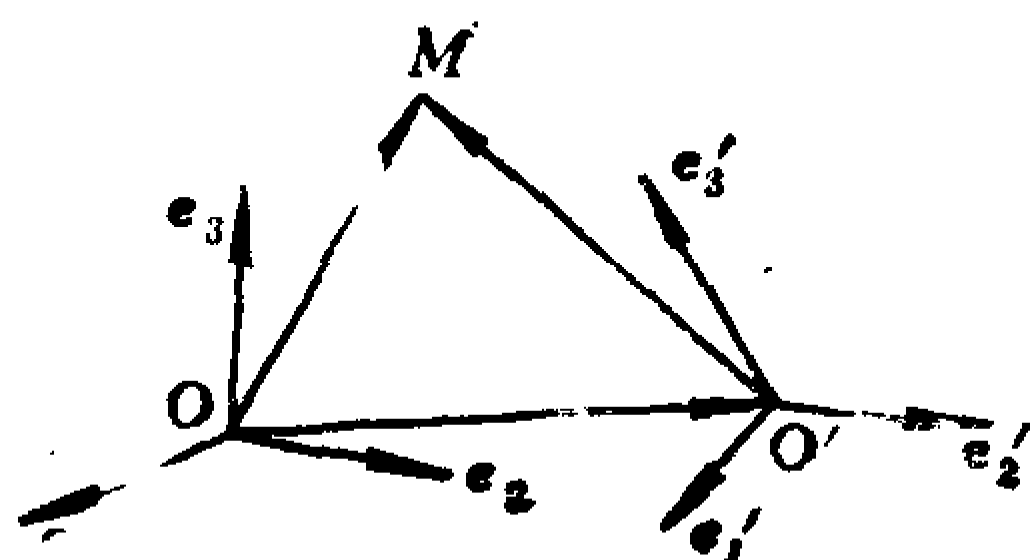



图 4.4

设$\boldsymbol{m}$的Ⅰ坐标为$(u_1,u_2,u_3)$，Ⅱ坐标为$(u_1',u_2',u_3')$，由(4.28)易得(4.29)。

**定理4.6** 仿射坐标系Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$到Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$的过渡矩阵$A$是非奇异的；并且Ⅰ与Ⅱ同定向的充分必要条件是$|A|>0$。

**证明** 因为Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵$A$的第$j$列是$\boldsymbol{e}_j'$的Ⅰ坐标，由于$\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$不共面，所以$|A|\neq 0$，即$A$非奇异。

由公式(1.34)得

$$\frac{\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_3'}{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}=|A|,$$

因此Ⅰ与Ⅱ同定向的充分必要条件是$|A|>0$。

**推论4.1** 平面上的两个仿射坐标系Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$和Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$同定向的充分必要条件是Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵$A$的行列式$|A|>0$。

**证明** 令$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$，考虑空间的两个仿射坐标系$\mathrm{I}_1$：$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和$\mathrm{II}_1$：$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3]$，利用定理4.6易证得推论4.1,详细推导请读者自己练习。

由(4.28)可以得到Ⅱ到Ⅰ的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}. \qquad (4.30)$$

## 4.2 直角坐标变换

定理4.5和4.6在直角坐标系中当然也成立。现在进一步研究直角坐标变换的特殊性。

**定理4.7** 设Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$都是直角坐标系，则Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵$A$是正交矩阵；从而Ⅱ到Ⅰ的过渡矩阵是$A'$。

**证明** 设$\boldsymbol{e}'_j$的Ⅰ坐标是$(a_{1j},a_{2j},a_{3j})$，$j=1,2,3$。因为Ⅱ是直角坐标系，所以$|\boldsymbol{e}'_j|=1,(j=1,2,3)$；$\boldsymbol{e}'_j\perp\boldsymbol{e}'_i$，当$i\neq j$。又因为Ⅰ是直角坐标系，所以上述条件用坐标写出就是：

$$a_{1j}^2+a_{2j}^2+a_{3j}^2=1,\qquad j=1,2,3;$$

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+a_{3i}a_{3j}=0,\qquad i\neq j.$$

这些条件说明Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

是正交矩阵；从而Ⅱ到Ⅰ的过渡矩阵是$A^{-1}=A'$。

由于正交矩阵的行列式等于$+1$或$-1$，因此空间的两个直角坐标系同定向的充分必要条件是它们的过渡矩阵的行列式等于$+1$。

## 4.3 例

**例4.3** 证明：在右手直角坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中，方程$f(2x+y-3z,x-2y)=0$表示的图形是柱面；并且求出它的母线方向和一条准线的方程。

**证明** 如果能选择一个合适的直角坐标系，使得这个图形的方程中不含某一个坐标，则此图形就是柱面。观察原方程的特点，知道如果令

$$x'=k(2x+y-3z),\qquad y'=l(x-2y),$$

则该图形方程变成 $f\left(\frac{x'}{k},\frac{y'}{l}\right)=0$。我们要求Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$也是右手直角坐标系，由Ⅱ到Ⅰ的直角坐标变换公式知，此时 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'$ 的Ⅰ坐标分别是 $(2k,k,-3k),(l,-2l,0)$，由于 $|\boldsymbol{e}_1'|=|\boldsymbol{e}_2'|=1$，所以应当取

$$k=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},\qquad l=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'=\frac{2}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{-3}{\sqrt{14}}\times 0=0$，所以 $\boldsymbol{e}_1'\perp\boldsymbol{e}_2'$。再令 $\boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'$，即得Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$为右手直角坐标系。$\boldsymbol{e}_3'$的Ⅰ坐标易算出为$\left(-\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}},-\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$。从而Ⅱ到Ⅰ的点的坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{14}}(2x+y-3z),\\ y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y),\\ z'=-\frac{1}{\sqrt{70}}(6x+3y+5z).\end{cases}$$

所给图形在Ⅱ中的方程为

$$f(\sqrt{14}x',\sqrt{5}y')=0,$$

因此它是柱面。它的母线方向 $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{e}_3'$，所以可取 $\boldsymbol{v}$ 为 $(6,3,5)$；它的准线在Ⅱ中的方程为

$$\begin{cases}f(\sqrt{14}x',\ \sqrt{5}y')=0,\\ z'=0;\end{cases}$$

从而准线在Ⅰ中的方程为

$$\begin{cases}f(2x+y-3z,x-2y)=0,\\ 6x+3y+5z=0.\end{cases}$$

## 4.4 代数曲面(线)及其次数

空间（或平面）的任一点$M$对于不同坐标系的坐标是不同的，因而作为点的轨迹的图形在不同坐标系中的方程也就不同，但是有

**定理4.8** 若图形$S$在仿射坐标系Ⅰ中的方程$F(x,y,z)=0$的左端是$x,y,z$的$n$次多项式，则$S$在任意一个仿射坐标系Ⅱ中的方程$G(x',y',z')=0$的左端是$x',y',z'$的$n$次多项式。

**证明** 因为Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式中$x,y,z$均表示成$x',y',z'$的一次多项式，所以若$F(x,y,z)$是多项式，则用Ⅰ到Ⅱ的坐标变换公式代入$F(x,y,z)$中得到的$G(x',y',z')$必是$x'$，$y',z'$的多项式，并且$G(x',y',z')$的次数$m$不超过$F(x,y,z)$的次数$n$。同理，因为用Ⅱ到Ⅰ的点的坐标变换公式代入$G(x',y',z')$中即得$F(x,y,z)$，所以$n\leqslant m$。于是$m=n$。

定理4.8说明，一个图形的方程的左端是否为多项式以及这多项式的次数与坐标系的选择无关，它们都是图形本身的性质。

若图形$S$的方程的左端是多项式，则称$S$是**代数曲面**；并且把这个多项式的次数称为这个**代数曲面的次数**。

平面上的图形有类似的性质。若平面上图形$S$的方程的左端是多项式，则称$S$是**代数曲线**，并且把这个多项式的次数称为这条**代数曲线的次数**。譬如，椭圆、双曲线、抛物线的标准方程是二次的，由此可知，它们不论在哪一个仿射坐标系中的方程也都是二次的，所以它们都称为二次曲线。

### 习 题 4.4

1. 设$OABC$为四面体，$L,M,N$依次是$\triangle ABC$的三边$AB$，$BC,CA$的中点。取

$$\text{Ⅰ}[O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}],\quad \text{Ⅱ}[O;\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}].$$

（1） 求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式，再求Ⅱ到Ⅰ的点(向量)的坐标变换公式；

（2） 求 $A,B,C,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的Ⅱ坐标。

2． 设Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$都是右手直角坐标系，已知$O'$的Ⅰ坐标是$(2,1,2)$，$\boldsymbol{e}_1'$与$\overrightarrow{O'O}$同向，$O'y'$轴与$Oy$轴交于点$A(0,9,0)$，$\boldsymbol{e}_2'$与$\overrightarrow{O'A}$同向。求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式。

3． 在右手直角坐标系Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中，已给三个互相垂直的平面

$\pi_1$: $x+y+z-1=0$，$\pi_2$: $x-z+1=0$，$\pi_3$: $x-2y+z+2=0$。

确定新的坐标系Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$使得$\pi_1,\pi_2,\pi_3$分别为$y'z'$，$z'x'$，$x'y'$坐标面；且$O$在新坐标系的第一卦限内。求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式。

4． 在右手直角坐标系$Oxyz$中，曲面$S$的方程为

（1） $(2x+y+z)^2-(x-y-z)^2=y-z$；

（2） $9x^2-25y^2+16z^2-24xz+80x-60z=0$。

试判断$S$是什么曲面？

5． 画出下列曲面的简图，这些曲面在右手直角坐标系$Oxyz$中的方程分别为

（1） $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z=1$；　　（2） $x^2+2xy+y^2+z^2=1$；

（3） $z=xy$；　　（4） $z=xy-x-y-2$。

6． 设Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$和Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$都是夹角为$\omega$的同定向的斜角坐标系（即$|\boldsymbol{e}_i|=|\boldsymbol{e}_i'|=1$，$i=1,2$；$\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\langle\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'\rangle=\omega$)，且$\boldsymbol{e}_1$到$\boldsymbol{e}_2'$的转角为$\dfrac{\pi}{2}$。求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式。

7． 已知$\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{r}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，将$\boldsymbol{r}$绕$\boldsymbol{e}$右旋角度$\theta$得$\boldsymbol{r}_1$，试用$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{r}$，$\theta$表示$\boldsymbol{r}_1$。

8． 给定三点$O,A,P(O\neq A)$，将$P$绕$\overrightarrow{OA}$右旋角度$\theta$得到

$P_1$，试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP}$，$\theta$表示$\overrightarrow{OP_1}$。

*9. 将右手直角坐标系Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$绕方向$\boldsymbol{v}(1,1,1)$右旋$\frac{\pi}{3}$，原点不动，得坐标系Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$。求Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式。

10. 在直角坐标系中，若$xOy$平面上的曲线

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

是椭圆（双曲线、抛物线），问二次曲面

$$z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$$

是什么曲面？

11. 如果
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

则曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1$$

是什么曲面？

*12. 证明：在直角坐标系$Oxyz$中，顶点在原点的二次锥面

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0$$

有三条互相垂直的直母线的充分必要条件是

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0.$$

*13. 设$l_1$和$l_2$是两条不相交的直线，分别通过$l_1$和$l_2$作两个互相垂直的平面，证明交线的轨迹是单叶双曲面。

*14. 设Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$是有相同原点的右手直角坐标系。则Ⅰ到Ⅱ的坐标变换可以分三个阶段来完成：

(i) $$\begin{cases} x=x''\cos\psi-y''\sin\psi, \\ y=x''\sin\psi+y''\cos\psi, \\ z=z''; \end{cases}$$

(ii) $\begin{cases} x'' = x''', \\ y'' = y'''\cos\theta - z\ \sin\theta, \\ z'' = y'''\sin\theta + z''\cos\theta; \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x''' = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y \ \ = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \\ z \ \ = z'. \end{cases}$

其中角 $\psi,\theta,\varphi$ 称为**欧拉角**，它们完全确定了Ⅰ到Ⅱ的坐标变换．试指出这三个阶段的坐标变换是怎么作的？角 $\psi,\theta,\varphi$ 各是哪个角？试写出用 $\psi,\theta,\varphi$ 表示的Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式．

# 第五章　二次曲线方程的化简及其性质

平面上的二次曲线除了椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线外，还有没有别的？如何从所给的二次方程判别它代表什么二次曲线？它的形状和位置如何？二次曲线有哪些几何性质？这些就是本章所要研究的问题。本章所取的坐标系都是右手直角坐标系。

平面上二次曲线的一般方程是

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0. \tag{5.1}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{22}$ 不全为零。

方程(5.1)的左端是 $x,y$ 的二次多项式，简记作 $F(x,y)$，把 $F(x,y)$的二次项部分

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 \tag{5.2}$$

简记作 $\varphi(x,y)$。利用矩阵的乘法可以把 $\varphi(x,y)$写成下述形式：

$$\varphi(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

由 $\varphi(x,y)$ 中 $x^2,y^2$ 项的系数作为主对角元，$xy$ 项的系数的一半作为(1,2)元组成的对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

称之为 $\varphi(x,y)$的矩阵。

利用矩阵的乘法，还可以把 $F(x,y)$写成下述形式：

$$F(x,y)=(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中矩阵

$$P=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a_0\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

称为二次方程(5.1)的矩阵，它是对称矩阵．令 $\delta^t=(a_1,a_2)$，则 $P$ 可以分块写成

$$P=\begin{pmatrix}A & \delta\\ \delta^t & a_0\end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

再令 $\alpha^t=(x,y)$，则 $F(x,y)$ 可以表示成

$$F(x,y)=(\alpha^t,1)\begin{pmatrix}A & \delta\\ \delta^t & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

于是方程(5.1)可以写成

$$(\alpha^t,1)\begin{pmatrix}A & \delta\\ \delta^t & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}=0. \tag{5.9}$$

## §1　二次曲线方程的化简

为了判别在右手直角坐标系 Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 中的二次方程(5.1)当系数取各种值时，它能表示哪几种曲线，容易想到的办法是：作右手直角坐标变换，使得二次曲线(5.1)在新坐标系中的方程比较简单，易于辨认出它表示什么曲线．由于任一右手直角坐标变换都可由移轴和转轴得到，所以我们首先来研究在转轴下二次方程(5.1)的系数变化规律．

### 1.1　作转轴消去交叉项

设 Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$ 是由 Ⅰ 经过转轴得到的，转角为 $\theta$．则 Ⅰ 到 Ⅱ 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

令

$$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \alpha=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \alpha'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},$$

则转轴公式(5.10)可以写成

$$\alpha=T\alpha'.$$

由(5.10)可以得到

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha'\\ 1\end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

用(5.11)代入方程(5.9)中，得到二次曲线(5.1)的新方程为：

$$(\alpha'^t,1)\begin{pmatrix}T^t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \delta\\ \delta^t & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha'\\ 1\end{pmatrix}=0, \tag{5.12}$$

即

$$(\alpha'^t,1)\begin{pmatrix}T^tAT & T^t\delta\\ \delta^tT & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha'\\ 1\end{pmatrix}=0. \tag{5.12$'$}$$

由于 $(T^tAT)^t=T^tA^tT=T^tAT$，所以 $T^tAT$ 仍为对称矩阵，于是新方程的二次项部分 $\varphi'(x',y')$ 的矩阵为 $T^tAT$；一次项系数的一半组成的列是 $T^t\delta$；常数项是 $a_0$。这说明：经过转轴，新方程的二次项系数只与原方程的二次项系数及转角 $\theta$ 有关；新方程的一次项系数只与原方程的一次项系数及转角 $\theta$ 有关；经过转轴，常数项不变。

既然二次方程的二次项系数在转轴下是会改变的，因此我们只要适当选取转角 $\theta$，就有可能消去交叉项(即，$xy$ 项)。从 $T^tAT$ 可求得新方程的交叉项系数的一半（它就是 $T^tAT$ 的(1，2)元）为：

$$(a_{22}-a_{11})\sin\theta\cos\theta+a_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(a_{22}-a_{11})\sin2\theta+a_{12}\cos2\theta. \tag{5.13}$$

因此，当 $a_{12}\neq0$ 时，新方程的交叉项系数为零的充分必要条件是

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}. \tag{5.14}$$

选取满足(5.14)的 $\theta$，则新方程成为

$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+2a_1'x'+2a_2'y'+a_0'=0, \tag{5.15}$$

其中 $a_0'=a_0$；$\delta'=T^t\delta$，这里 $\delta'=\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\end{pmatrix}$。现在来求 $a_{11}'$ 和 $a_{22}'$，它们分别是 $T^tAT$ 的(1,1)元和(2,2)元。因为 $T$ 是正交矩阵，所以 $T^t=T^{-1}$。于是有

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}a_{11}' & 0\\0 & a_{22}'\end{pmatrix},$$

从而有

$$AT=T\begin{pmatrix}a_{11}' & 0\\0 & a_{22}'\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}' & 0\\0 & a_{22}'\end{pmatrix},$$

比较等式两边的矩阵的主对角元便得到：

$$a_{11}\cos\theta+a_{12}\sin\theta=a_{11}'\cos\theta, \tag{5.16}$$

$$-a_{12}\sin\theta+a_{22}\cos\theta=a_{22}'\cos\theta. \tag{5.17}$$

假如 $\cos\theta=0$，则由(5.16)得 $a_{12}\sin\theta=0$，由于 $a_{12}\neq0$，因此得 $\sin\theta=0$，这不可能，所以 $\cos\theta\neq0$。从(5.16)和(5.17)分别得到

$$a_{11}'=a_{11}+a_{12}\operatorname{tg}\theta, \tag{5.18}$$

$$a_{22}'=a_{22}-a_{12}\operatorname{tg}\theta. \tag{5.19}$$

**例5.1** 作转轴消去下述二次方程的交叉项

$$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0,$$

**解**　选取转角 $\theta$ 使得它满足

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5-2}{4} = \frac{3}{4},$$

即

$$2\operatorname{tg}^2\theta + 3\operatorname{tg}\theta - 2 = 0.$$

解得 $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$ 或 $-2$。取 $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$，且取 $\theta$ 为锐角，则

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

于是

$$a_{11}{}' = a_{11} + a_{12}\operatorname{tg}\theta = 5 + 2\times\frac{1}{2} = 6,$$

$$a_{22}{}' = a_{22} - a_{12}\operatorname{tg}\theta = 2 - 2\times\frac{1}{2} = 1,$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_0{}' = a_0 = 18.$$

因此转轴后的新方程为

$$6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}\,x' + 18 = 0.$$

转轴公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

## 1.2　作移轴进一步化简方程

经过转轴消去交叉项后，就可以通过配方，再作移轴，把二

次方程行一步化简，这时需要区分几种情况：

情形1. $a_{11}'$与$a_{22}'$同号

由于椭圆的标准方程中平方项的系数是同号的，因此我们把消去交叉项后，平方项系数同号的二次曲线称为**椭圆型曲线**。此时把新方程(5.15)配方得

$$a_{11}'\left(x'+\frac{a_1'}{a_{11}'}\right)^2+a_{22}'\left(y'+\frac{a_2'}{a_{22}'}\right)^2+a_0'-\frac{a_1'^2}{a_{11}'}-\frac{a_2'^2}{a_{22}'}=0,$$

作移轴

$$\begin{cases}x^*=x'+\dfrac{a_1'}{a_{11}'},\\ y^*=y'+\dfrac{a_2'}{a_{22}'},\end{cases}\tag{5.20}$$

则二次方程(5.15)变成

$$a_{11}'x^{*2}+a_{22}'y^{*2}+c_1^*=0,\tag{5.21}$$

其中

$$c_1^*=-\left(\frac{a_1'^2}{a_{11}'}+\frac{a_2'^2}{a_{22}'}\right)+a_0'.$$

[1.1] 若$c_1^*$与$a_{11}'$异号，则(5.21)两边同除以$-c_1^*$，得

$$\frac{x^{*2}}{a_1^2}+\frac{y^{*2}}{b_1^2}=1,\tag{5.22}$$

其中$a_1^2=\dfrac{-c_1^*}{a_{11}'}$，$b_1^2=\dfrac{-c_1^*}{a_{22}'}$。显然(5.22)是椭圆的标准方程。

[1.2] 若$c_1^*$与$a_{11}'$同号，则类似得

$$\frac{x^{*2}}{a_2^2}+\frac{y^{*2}}{b_2^2}=-1,\tag{5.23}$$

其中$a_2^2=\dfrac{c_1^*}{a_{11}'}$，$b_2^2=\dfrac{c_1^*}{a_{22}'}$.显然方程(5,23)无轨迹，有时也称(5,23)表示一个虚椭圆。

[1.3]　若 $c_1^*=0$，则(5.21)可写成

$$\frac{x^{*2}}{a_3^2}+\frac{y^{*2}}{b_3^2}=0, \tag{5.24}$$

其中 $a_3^2=\frac{1}{|a'_{11}|}$，$b_3^2=\frac{1}{|a'_{22}|}$。显然(5.24)表示一个点0*(移轴后的坐标系的原点)。

情形2.　$a_{11}'$ 与 $a_{22}'$ 异号

由于双曲线的标准方程中平方项的系数异号，因此我们把消去交叉项后，平方项系数异号的二次曲线称为**双曲型曲线**。此时类似于情形 1，方程(5.15)经配方，再作移轴(5.20)可以变成(5.21)。

[2.4]　若 $c_1^*\neq 0$，将(5.21)两边同除以 $-c_1^*$，得

$$\frac{x^{*2}}{a_4^2}-\frac{y^{*2}}{b_4^2}=1,\quad \text{当 } c_1^* \text{ 与 } a_{11}^* \text{异号；} \tag{5.25}$$

或

$$-\frac{x^{*2}}{a_5^2}+\frac{y^{*2}}{b_5^2}=1,\quad \text{当 } c_1^* \text{ 与 } a_{11}^* \text{ 同号。} \tag{5.26}$$

其中

$$a_4^2=\frac{-c_1^*}{a_{11}'},\quad b_4^2=\frac{c_1^*}{a'_{22}};\quad a_5^2=\frac{c_1^*}{a'_{11}},\quad b_5^2=\frac{-c_1^*}{a'_{22}}.$$

显然(5.25)和(5.26)均表示双曲线。(5.26)可将坐标轴再转 $\frac{\pi}{2}$，变成(5.25)形式。

[2.5]　若 $c_1^*=0$，则(5.21)可化成

$$\frac{x^{*2}}{a_3^2}-\frac{y^{*2}}{b_3^2}=0, \tag{5.27}$$

把左边分解因式，可看出这个方程表示一对相交直线。

情形3.　$a'_{11}$ 与 $a'_{22}$ 中有一个为零(不可能全为零)

由于抛物线的标准方程中平方项系数有一个为零，所以把消去交叉项后，平方项系数有一个为零的二次曲线称为**抛物型曲线**。

此时不妨设 $a'_{11}=0$，$a'_{22}\neq 0$（如果 $a'_{11}\neq 0$，$a'_{22}=0$，则可将坐标轴再转$\frac{\pi}{2}$，即作坐标变换：$x'=-\overline{y}$，$y'=\overline{x}$；从而新方程中 $\overline{a_{11}}=0$，$\overline{a_{22}}\neq 0$）。这时方程(5.15)成为

$$a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'_0=0. \tag{5.28}$$

配方得

$$a'_{22}\left(y'+\frac{a'_2}{a'_{22}}\right)^2+2a'_1x'+a'_0-\frac{a'^2_2}{a'_{22}}=0. \tag{5.29}$$

[3.6] 若 $a'_1\neq 0$，则作移轴

$$\begin{cases} x^*=x'+\dfrac{a'_{22}a'_0-a'^2_2}{2a'_1a'_{22}}, \\ y^*=y'+\dfrac{a'_2}{a'_{22}}, \end{cases} \tag{5.30}$$

则(5.29)成为

$$a'_{22}y^{*2}+2a'_1x^*=0. \tag{5.31}$$

显然这是抛物线的方程。

若 $a'_1=0$，则(5.29)成为

$$a'_{22}\left(y'+\frac{a'_2}{a'_{22}}\right)^2+c^*_2=0,\quad 其中\quad c^*_2=a'_0-\frac{a'^2_2}{a'_{22}}.$$

作移轴

$$\begin{cases} x^*=x', \\ y^*=y'+\dfrac{a'_2}{a'_{22}}, \end{cases} \tag{5.32}$$

得

$$a'_{22}y^{*2}+c^*_2=0. \tag{5.33}$$

[3.7] 若 $c^*_2$ 与 $a'_{22}$ 异号，则由(5.33)得

$$y^{*2}=\frac{-c_2^*}{a'_{22}}. \tag{5.34}$$

显然，这个方程表示一对平行直线。

[3.8] 若 $c_2^*$ 与 $a'_{22}$ 同号，则易看出方程(5.33)无轨迹，有时称它表示一对虚平行直线。

[3.9] 若 $c_2^*=0$，则由(5.33)得

$$y^{*2}=0. \tag{5.35}$$

显然，这个方程表示一对重合直线(与 $x^*$ 轴重合)。

综上述，经过直角坐标变换把二次曲线方程化简后，可以看出，二次曲线共有九类，其中椭圆型曲线有三类：椭圆，虚椭圆，一个点；双曲型曲线有两类：双曲线，一对相交直线；抛物型曲线有四类：抛物线，一对平行直线，一对虚平行直线，一对重合直线。

椭圆，双曲线，抛物线这三类统称为**圆锥曲线**。

### 1.3 例

**例5.2** 确定例5.1中的二次方程表示的二次曲线的类型、形状和位置，并且画图。

**解** 例5.1中已通过转轴(转角 $\theta$ 是锐角，且 $\mathrm{tg}\theta=1/2$)把二次方程化简成

$$6x'^2+y'^2-12\sqrt{5}x'+18=0.$$

因为 $a'_{11}$ 与 $a'_{22}$ 同号，所以这是椭圆型曲线。配方得

$$6(x'-\sqrt{5})^2+y'^2-12=0,$$

作移轴

$$\begin{cases} x^*=x'-\sqrt{5}, \\ y^*=y', \end{cases}$$

得
$$6x^{*2}+y^{*2}-12=0,$$

即
$$\frac{x^{*2}}{2}+\frac{y^{*2}}{12}=1.$$

这是椭圆，长轴在 $y^*$ 轴上，长半轴为$\sqrt{12}$，短半轴为$\sqrt{2}$。

由例 5.1 的转轴公式和上述移轴公式，可得出总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*+\sqrt{5} \\ y^* \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{5}}x^*-\frac{1}{\sqrt{5}}y^*+2, \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}x^*+\frac{2}{\sqrt{5}}y^*+1. \end{cases}$$

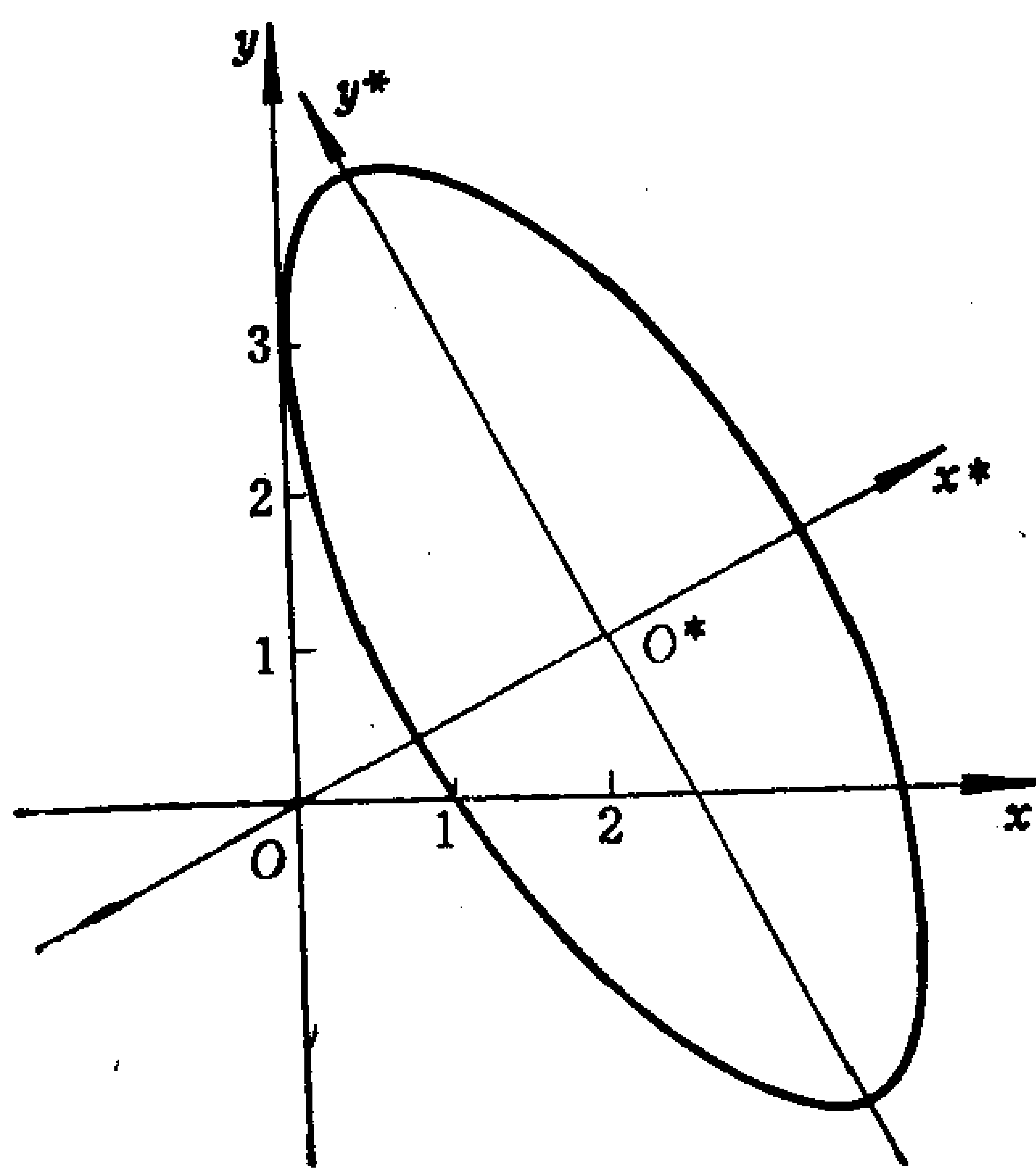



图 5.1

因此，最后的坐标系 $O^*x^*y^*$ 的原点 $O^*$ 在 $Oxy$ 中的坐标为(2,1)，而 $x$ 轴到 $y^*$轴的转角$\theta$满足$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$，且 $\theta$ 为锐角。于是可确定出椭圆的位置。图就可以画出了。

**例5.3** 确定下述二次方程表示的二次曲线的类型、形状和位置，并且画图。

$$4x^2+8xy+4y^2+13x+3y+4=0.$$

**解** 选取 $\theta$ 使满足

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{4-4}{8}=0,$$

所以$2\theta=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$，即，$\theta=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$。取$\theta=\frac{\pi}{4}$，于是

$$\operatorname{tg}\theta=1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

从而

$$a'_{11}=a_{11}+a_{12}\operatorname{tg}\theta=4+4\times1=8,$$
$$a'_{22}=a_{22}-a_{12}\operatorname{tg}\theta=4-4\times1=0,$$

$$\begin{pmatrix}a'_1\\ a'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\ -\frac{5}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$a'_0=a_0=4.$$

所以转轴后方程为

$$8x'^2+8\sqrt{2}x'-5\sqrt{2}y'+4=0.$$

这是抛物型曲线，配方得

$$8\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-5\sqrt{2}y'=0,$$

作移轴

$$\begin{cases}x^*=x'+\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y^*=y',\end{cases}$$

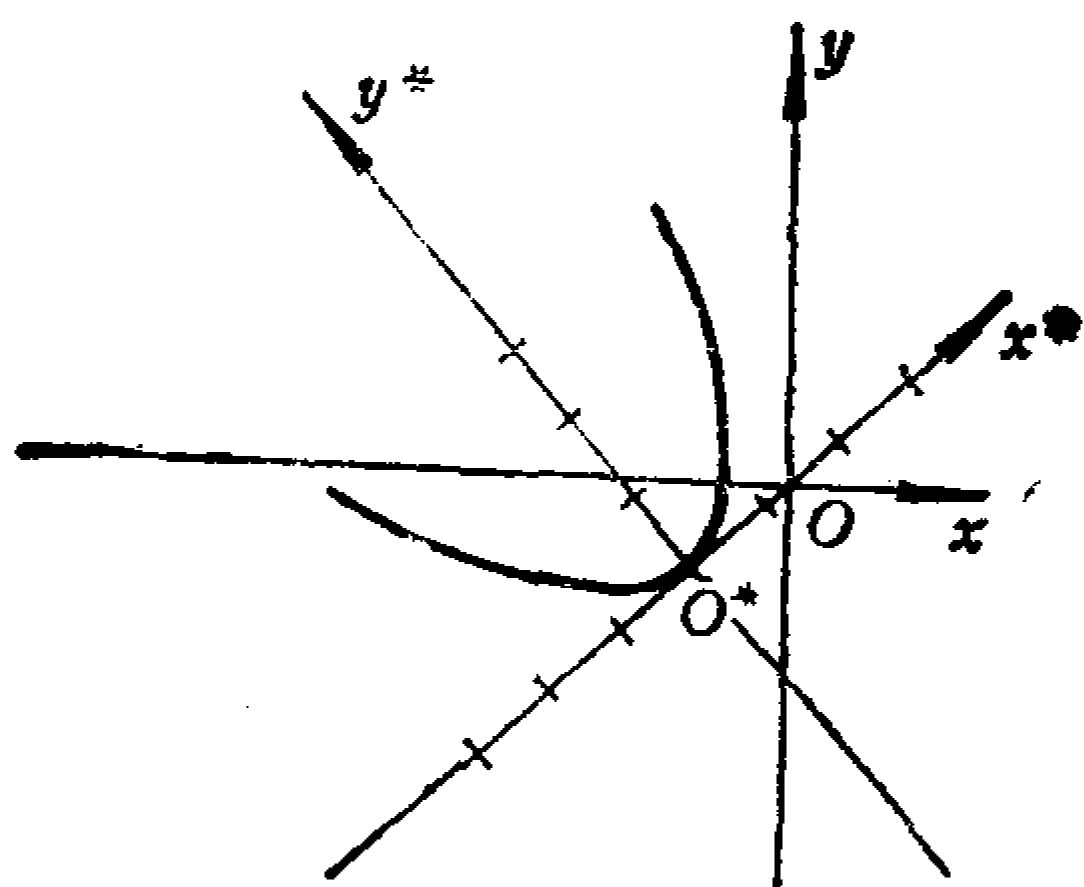



图 5.2

得新方程为 $8x^{*2}-5\sqrt{2}y^*=0$，即

$$x^{*2}=\frac{5\sqrt{2}}{8}y^*.$$

这是抛物线，开口朝着 $y^*$ 轴正向，焦参数 $p=\frac{5}{16}\sqrt{2}$.

总的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y^* \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x^*-\frac{\sqrt{2}}{2}y^*-\frac{1}{2}, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^*+\frac{\sqrt{2}}{2}y^*-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

于是 $O^*x^*y^*$ 的原点 $O^*$ 在 $Oxy$ 中的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$x$ 轴到 $x^*$ 轴的转角为 $\frac{\pi}{4}$，这样就可画图了。

## 习 题 5.1

1．通过直角坐标变换确定下列二次方程表示的曲线的类型、形状和位置，并且画图。

(1) $11x^2+6xy+3y^2-12x-12y-12=0$;

(2) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

(3) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

(4) $3x^2+4xy+2y^2+8x+4y+6=0$;

(5) $x^2+xy-2y^2-11x-y+28=0$;

(6) $9x^2-8xy+24y^2-32x-16y+138=0$;

(7) $6x^2+12xy+y^2-36x-6y=0$;

(8) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$.

2. 给定方程

$$(A_1x+B_1y+C_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2)^2=1,$$

其中

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0,\quad A_1A_2+B_1B_2=0.$$

试经过适当坐标变换把上述方程化成标准形式，并且指出此方程表示什么曲线。

## §2 二次曲线的不变量

上节中，我们已经会通过转轴和移轴，把二次曲线方程化简成标准形式，由此确定曲线的类型、形状和位置。但是在不少问题中，常常希望直接从原二次方程的系数来判别它代表的曲线的类型和形状，本节就来解决这个问题。解决此问题的途径是：先讨论在直角坐标变换下，二次方程的系数(看成参变量)的哪些函数其函数值是保持不变的，然后我们就能确定原方程的系数与经过转轴和移轴得到的最简方程的系数之间的关系，从而就可用原方程的系数来直接判别曲线的类型和形状。

### 2.1 二次曲线的不变量和半不变量

曲线的方程一般是随着坐标系的改变而改变的，但是既然这些方程都是代表同一条曲线，它们就应该有某些共同性，也就是说它们的系数应该有某些共同的特性是不随坐标系的改变而变化的。刻划这种共同性的量，我们称它为不变量。确切地说

**定义5.1** 曲线方程系数的一个确定的函数，如果在任意一

个直角坐标变换下它的函数值不变，那么就称这个函数是这条曲线的一个**正交不变量**，简称为**不变量**。

不变量既然与直角坐标系的选择无关，于是它就反映了曲线本身的几何性质。因此找出曲线方程的不变量是解析几何研究中的一个重要课题。

**定理5.1** 在给定的直角坐标系中，设二次曲线的方程为(5.1)。令

$$I_1 = a_{11} + a_{22},\quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

则 $I_1, I_2, I_3$ 都是二次曲线的不变量。

**证明** 先证 $I_1, I_2, I_3$ 在转轴下不变。

作转轴 $\alpha = T\alpha'$，§1中已算出转轴后新方程(5.12)的二次项部分 $\varphi'(x', y')$ 的矩阵为 $T'AT$，于是

$$\begin{aligned} I_2' &= |T'AT| = |T'|\,|A|\,|T| = |T|\,|A|\,|T| \\ &= |T|^2|A| = |A| = I_2. \end{aligned}$$

$I_1'$ 是新方程(5.12)的平方项系数之和，亦即 $T'AT$ 的主对角元之和。用 $t_{ij}$ 表示 $T$ 的$(i,j)$元，则

$$\begin{aligned} I_1' &= \sum_{i=1}^{2} (T'AT)\text{的}(i,i)\text{元} \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} [T' \text{ 的}(i,k)\text{元}]\cdot[AT \text{ 的}(k,i)\text{元}] \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} t_{ki}\sum_{l=1}^{2} a_{kl}t_{li} \\ &\overset{(*)}{=\!=} \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} a_{kl}\left(\sum_{i=1}^{2} t_{ki}t_{li}\right) \overset{(**)}{=\!=} a_{11} + a_{22} = I_1, \end{aligned}$$

其中(*)步利用了连加号可以交换次序的性质；(**)步利用了 $T$

是正交矩阵，因此，当 $k \neq l$ 时，$\sum_{i=1}^{2} t_{ki} t_{li} = 0$；当 $k = l$ 时，

$$\sum_{i=1}^{2} t_{ki} t_{li} = 1.$$

$I_3'$ 是新方程(5.12)的矩阵 $P'$ 的行列式，由(5.12)′知，

$$P' = \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \delta \\ \delta^t & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$I_3' = |P'| = \begin{vmatrix} T^t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} |P| \begin{vmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |T^t||P||T| = |T|^2|P| = |P| = I_3,$$

这里用到了 $T$ 是正交矩阵，从而 $|T| = 1$ 或 $-1$。

再证 $I_1, I_2, I_3$ 在移轴下不变。

作移轴

$$\begin{cases} x = x^* + x_0, \\ y = y^* + y_0, \end{cases} \tag{5.36}$$

将此移轴公式代入原二次方程(5.1)得

$$a_{11}(x^* + x_0)^2 + 2a_{12}(x^* + x_0)(y^* + y_0) + a_{22}(y^* + y_0)^2 + 2a_1(x^* + x_0) + 2a_2(y^* + y_0) + a_0 = 0,$$

整理得

$$a_{11}x^{*2} + 2a_{12}x^*y^* + a_{22}y^{*2} + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x^* + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y^* + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 = 0, \tag{5.37}$$

这就是曲线 (5.1) 经过移轴后的新方程。如果新方程的系数用带“*”号表示，则可写出新方程系数与原方程系数的关系：

$$
\begin{cases}
a_{11}^* = a_{11}, \quad a_{12}^* = a_{12}, \quad a_{22}^* = a_{22}, \\
a_1^* = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1, \\
a_2^* = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2, \\
a_0^* = F(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 \\
\qquad + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0.
\end{cases}
\tag{5.38}
$$

由(5.38)即得

$$I_1^* = a_{11}^* + a_{22}^* = a_{11} + a_{22} = I_1;$$

$$I_2^* = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = I_2;$$

$$
\begin{aligned}
I_3^* &= \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_1^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_2^* \\ a_1^* & a_2^* & a_0^* \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 & F(x_0, y_0) \end{vmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 & a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 & a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 \end{vmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = I_3.
\end{aligned}
$$

其中第(1)步是分别把第 1 列的 $-x_0$ 倍和第 2 列的 $-y_0$ 倍加到第 3 列；第(2)步是分别把第 1 行的 $-x_0$ 倍和第 2 行的 $-y_0$ 倍加到第 3 行。

综上述知，$I_1, I_2, I_3$ 是不变量。

**定理5.2** 设二次曲线在直角坐标系 $Oxy$ 中的方程为(5.1)，令

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

则在转轴下，$K_1$ 不变；并且对于 $I_2=I_3=0$ 的二次曲线，$K_1$ 在移轴下也不变。称 $K_1$ 是二次曲线的半不变量。

**证明** 作转轴 $\alpha=T\alpha'$，则因为 $\delta'=T^t\delta$，所以有

$$
\begin{aligned}
K_1' &= \begin{vmatrix} a_{11}' & a_1' \\ a_1' & a_0' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}' & a_2' \\ a_2' & a_0' \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}'+a_{22}')a_0-(a_1'^2+a_2'^2)=I_1'a_0-\delta'^t\delta' \\
&= I_1a_0-(T^t\delta)^t(T^t\delta)=I_1a_0-\delta^tTT^t\delta \\
&= I_1a_0-\delta^t\delta=I_1a_0-(a_1^2+a_2^2)=K_1.
\end{aligned}
$$

对于 $I_2=I_3=0$ 的二次曲线，由 $I_2=0$，得 $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$，即，$a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}$，此时 $a_{11}$ 和 $a_{22}$ 至少有一个不为零（否则会有 $a_{11}=a_{22}=a_{12}=0$，矛盾），不妨设 $a_{22}\neq 0$，记 $a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}=l$。此时有

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} la_{12} & la_{22} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1-la_2 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \\
&= (a_1-la_2)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1-la_2)\begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_1-la_2 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= -a_{22}(a_1-la_2)^2,
\end{aligned}
$$

因为 $I_3=0$，$a_{22}\neq 0$，所以 $a_1-la_2=0$。于是得到

$$a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}=a_1:a_2=l. \tag{5.39}$$

现在作移轴 $\alpha=\alpha^*+\alpha_0$，由(5.38)得

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11}^* & a_1^* \\ a_1^* & a_0^* \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1 \\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1 & F(x_0,y_0) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+a_1 \\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1 & a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+a_1x_0+2a_2y_0+a_0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+a_1 \\ a_{12}y_0+a_1 & a_{22}y_0^2+2a_2y_0+a_0 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

若 $l\neq 0$，(5.40)式等于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{l}a_{11}y_0+a_1 \\ \frac{1}{l}a_{11}y_0+a_1 & \frac{1}{l^2}a_{11}y_0^2+2\frac{1}{l}a_1y_0+a_0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ \frac{1}{l}a_{11}y_0+a_1 & \frac{1}{l}a_1y_0+a_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix},$$

若 $l=0$，则由(5.39)知，$a_{11}=a_{12}=a_1=0$，于是(5.40)式等于零。总之，有

$$\begin{vmatrix} a_{11}^* & a_1^* \\ a_1^* & a_0^* \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

类似地可证

$$\begin{vmatrix} a_{22}^* & a_2^* \\ a_2^* & a_0^* \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

因此，$K_1^*=K_1$。这表明，对于 $I_2=I_3=0$的二次曲线，$K_1$ 在移轴下也是不变的。

注意，对于任意二次曲线，$K_1$ 在移轴下其函数值可能变化。

## 2.2 利用不变量确定二次曲线的类型和形状

设二次曲线的方程(5.1)经过直角坐标变换化成了最简形式。

情 1 形和2。椭圆型和双曲型曲线，此时最简方程为

$$a'_{11}x^{*2}+a'_{22}y^{*2}+c_1^*=0.$$

当 $a'_{11}$ 与 $a'_{22}$ 同(异)号时，为椭圆型(双曲型)。由于 $I_1$ 和 $I_2$是不变量，所以有

$$\begin{cases} a'_{11}+a'_{22}=I_1, \\ a'_{11}a'_{22}=I_2. \end{cases} \tag{5.41}$$

于是，$a'_{11}$ 与 $a'_{22}$ 同号的充分必要条件是 $I_2>0$。这表明，若 $I_2>0$，则曲线为椭圆型；若 $I_2<0$，则为双曲型。从(5.41)还看出，$a'_{11}$ 和 $a'_{22}$ 是一元二次方程

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \tag{5.42}$$

的两个实根。称(5.42)是二次曲线(5.1)的**特征方程**，它的两个实根称为二次曲线(5.1)的**特征根**，记作$\lambda_1,\lambda_2$。注意由于方程(5.42)的判别式

$$\begin{aligned} I_1^2 - 4I_2 &= (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) \\ &= (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

所以此方程一定有两个不等或相等的实根。

因为$I_3$也是不变量。所以有

$$I_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_1^* \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}c_1^* = I_2c_1^*,$$

从而得

$$c_1^* = \frac{I_3}{I_2}. \tag{5.43}$$

这样椭圆型或双曲型曲线的最简方程(5.21)可写成：

$$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{5.44}$$

由最简方程(5.44)可以确定二次曲线的形状，并且得出判别曲线所属的类的方法：在$I_2>0$时，若$I_3$与$I_1$异号，则曲线(5.1)是椭圆；若$I_3$与$I_1$同号，则曲线(5.1)是虚椭圆；若$I_3=0$，则曲线(5.1)是一个点。在$I_2<0$时，若$I_3\neq 0$，则曲线(5.1)是双曲线；若$I_3=0$，则曲线(5.1)是一对相交直线。

情形3. 抛物型曲线。

[3.6] 抛物线，其最简方程为

$a'_{22}y^{*2} + 2a'_1x^* = 0$，其中$a'_{22}\neq 0$，$a'_1\neq 0$。

由于$I_1,I_2,I_3$是不变量，因此有

$$I_1 = a'_{22},\ I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}0 & 0 & a_1'\\ 0 & a_{22}' & 0\\ a_1' & 0 & 0\end{vmatrix}=-a_{22}'a_1'^2=-I_1a_1'^2.$$

于是最简方程(5.31)可写成

$$I_1y^{*2}\pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x^*=0. \qquad (5.45)$$

[3.7]—[3.9] 此时最简方程为

$$a_{22}'y^{*2}+c_2^*=0,\ 其中\quad a_{22}'\neq 0.$$

算出 $I_1=a_{22}'$，$I_2=0$，$I_3=0$。由于 $I_2=I_3=0$，因此，$K_1$在转轴和移轴下均不变，从而有

$$K_1=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & c_2^*\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}' & 0\\ 0 & c_2^*\end{vmatrix}=a_{22}'c_2^*=I_1c_2^*,$$

于是最简方程(5.33)可写成

$$I_1y^{*2}+\frac{K_1}{I_1}=0. \qquad (5.46)$$

综上述知，$I_2=0$时，曲线(5.1)为抛物型。此时，若$I_3\neq 0$，

<table>
<tr><th>型 别</th><th>类 别</th><th>识别标志</th><th>化 简 后 方 程</th></tr>
<tr><td>(Ⅰ)椭圆型<br>$I_2>0$</td><td>1. 椭圆，<br>2. 虚椭圆，<br>3. 一个点；</td><td>$I_3$与$I_1$异号，<br>$I_3$与$I_1$同号，<br>$I_3=0$；</td><td rowspan="2">$\lambda_1x^{*2}+\lambda_2y^{*2}+\frac{I_3}{I_2}=0$，<br>其中$\lambda_1,\lambda_2$是方程<br>$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$<br>的两个实根。</td></tr>
<tr><td>(Ⅱ)双曲型<br>$I_2<0$</td><td>4. 双曲线，<br>5. 一对相交直线；</td><td>$I_3\neq 0$，<br>$I_3=0$；</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(Ⅲ)抛物型<br>$I_2=0$</td><td>6. 抛物线；</td><td>$I_3\neq 0$；</td><td>$I_1y^{*2}\pm 2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}x^*=0$。</td></tr>
<tr><td>7. 一对平行直线，<br>8. 一对虚平行直线，<br>9. 一对重合直线。</td><td>$I_3=0,K_1<0$，<br>$I_3=0,K_1>0$，<br>$I_3=0,K_1=0$。</td><td>$I_1y^{*2}+\frac{K_1}{I_1}=0$。</td></tr>
</table>

则曲线(5.1)为抛物线，其形状由方程(5.45)可确定；若$I_3=0$，则又分三种情况：$K_1<0$时，曲线(5.1)为一对平行直线(从方程(5.46)可以看出)；$K_1>0$时，为一对虚平行直线；$K_1=0$时，为一对重合直线。

从上面看到，利用二次曲线的不变量$I_1,I_2,I_3$和半不变量$K_1$，就能完全确定曲线的类型和形状。把上述结果列成一个表（见上页）。

## 2.3 例

**例5.4** 判断下列二次曲线的类型，并且确定其形状。

(1) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$；

(2) $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$。

**解** (1) $I_1=1+1=2$；

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1\end{vmatrix}=-\frac{5}{4}.$$

因为$I_2<0$，所以这是双曲型曲线。

$$I_3=\begin{vmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 5\\ -\frac{3}{2} & 1 & -5\\ 5 & -5 & 21\end{vmatrix}=-\frac{5}{4}.$$

因为$I_3\neq 0$，所以这是双曲线。

解特征方程 $\lambda^2-2\lambda-\frac{5}{4}=0$，得

$$\lambda_1=-\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{5}{2}.$$

又 $\frac{I_3}{I_2}=1$。于是方程可化简成：

$$-\frac{1}{2}x^{*2}+\frac{5}{2}y^{*2}+1=0,$$

即

$$\frac{x^{*2}}{2}-\frac{y^{*2}}{\frac{2}{5}}=1.$$

于是这条双曲线的实半轴 $a=\sqrt{2}$，虚半轴 $b=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$。

(2) $I_1=1+4=5$； $I_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$。

这是抛物型曲线。

$$I_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -10\\ 2 & 4 & 5\\ -10 & 5 & -50\end{vmatrix}=-625.$$

因为 $I_3\neq 0$，所以这是抛物线。计算 $\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}=\sqrt{\frac{625}{5}}=5\sqrt{5}$。

于是方程可化简成：

$$5y^{*2}\pm 10\sqrt{5}\,x^*=0,$$

即

$$y^{*2}\pm 2\sqrt{5}\,x^*=0.$$

因此这条抛物线的焦参数 $p=\sqrt{5}$。

**例5.5** 按参数 $\lambda$ 的值讨论下述曲线的类型。

$$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0.$$

**解** $I_1=2\lambda$,

$I_2=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$,

$I_3=5\lambda^2-2\lambda-3=5\left(\lambda+\frac{3}{5}\right)(\lambda-1)$,

$K_1=10\lambda-2=2(5\lambda-1)$.

(1) 当 $|\lambda|>1$ 时，$I_2>0$，属椭圆型。

1.1) 当 $\lambda>1$ 时，$I_1>0$，$I_3>0$，因此是虚椭圆；

1.2) 当 $\lambda<-1$ 时，$I_1<0$，$I_3>0$，因此是椭圆。

(2) 当 $|\lambda|<1$ 时，$I_2<0$，属双曲型。

2.1) 当 $-1<\lambda<1$，且 $\lambda\neq-\frac{3}{5}$时，$I_3\neq0$，是双曲线；

2.2) 当 $\lambda=-\frac{3}{5}$时，$I_3=0$，是一对相交直线。

(3) 当 $|\lambda|=1$ 时，$I_2=0$，属抛物型。

3.1) 当 $\lambda=1$ 时，$I_3=0$，$K_1=8>0$，是一对虚平行直线；

3.2) 当 $\lambda=-1$ 时，$I_3\neq0$，是抛物线。

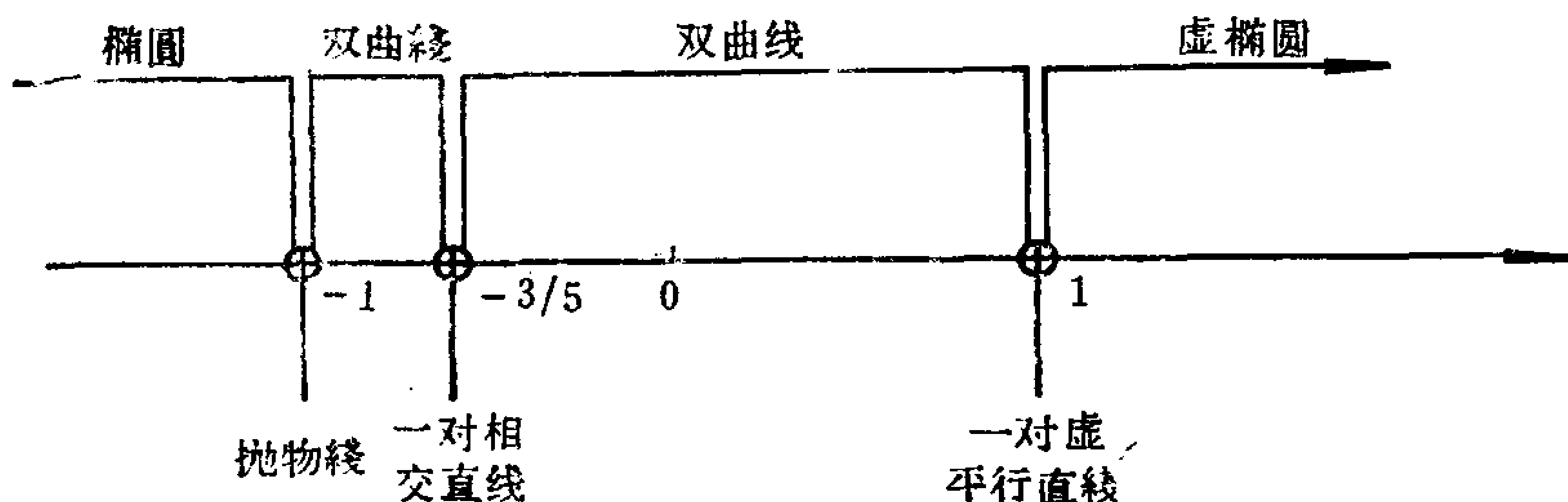



图 5.3

## 习 题 5.2

1. 判断下列二次曲线的类型，并且确定其形状。

(1) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$；

(2) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$；

(3) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$；

(4) $5x^2-16xy+29y^2+10x-34y+9=0$；

(5) $x^2+xy-2y^2-11x-y+28=0$；

(6) $8x^2+8xy+2y^2-6x-3y-5=0$。

2. 当 $\lambda$ 取何值时，方程

$$\lambda x^2+4xy+y^2-4x-2y-3=0$$

表示一对直线？

3. 按参数 $\lambda$ 的值讨论下列曲线的类型。

(1) $(1+\lambda^2)(x^2+y^2)-4\lambda xy+2\lambda(x+y)+2=0$；

(2) $x^2-4xy+4y^2+8y+3+2\lambda(-2xy-x-1)=0$。

4． 证明：二次方程(5.1)表示一个圆的充分必要条件是 $I_1^2=4I_2$，$I_1I_3<0$。

5． 证明：二次方程(5.1)表示一条等轴双曲线或两条互相垂直的直线的充分必要条件是 $I_1=0$。

6． 设二次方程(5.1)表示一对平行直线，证明：这对平行直线间的距离为

$$d=\sqrt{-\frac{4K_1}{I_1^2}}.$$

7． 证明：抛物线 $y^2=2px$ 满足 $I_1I_3<0$。

## §3 二次曲线的对称中心

上一节我们利用二次曲线的不变量和半不变量直接从原方程的系数确定了曲线的类型和形状，那末能否直接从原方程确定曲线的位置呢？譬如，椭圆，只要能从原方程的系数求出它的对称中心和两根对称轴（长轴和短轴），则椭圆的位置就确定了。因此，从本节开始，我们来讨论如何直接从原方程判别二次曲线有没有对称中心和对称轴，如果有的话，如何求出它们。我们还要讨论如何直接从原方程求出二次曲线的切线和法线，求出双曲线的渐近线等。由于二次曲线的对称轴、切线、渐近线都是直线，因此我们就从讨论直线与二次曲线的相关位置入手。

### 3.1 直线与二次曲线的相关位置

设二次曲线 $S$ 的方程为(5.1)，设直线 $l$ 过点 $M_0(x_0,y_0)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}(\mu,\nu)$，则 $l$ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x_0+\mu t, \\ y=y_0+\nu t, \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty. \tag{5.47}$$

为了讨论直线 $l$ 与二次曲线 $S$ 的相关位置，我们把(5.47)代入(5.1)，经整理得：

$$\varphi(\mu,\nu)t^2+2[F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu]t$$
$$+F(x_0,y_0)=0, \qquad (5.48)$$

其中 $F(x,y)$是(5.1)的左端的多项式，$\varphi(x,y)$是 $F(x,y)$的二次项部分，

$$F_1(x,y):=a_{11}x+a_{12}y+a_1,\quad F_2(x,y):=a_{12}x+a_{22}y+a_2.$$

*情形*1. 若 $\varphi(\mu,\nu)\neq 0$，则(5.48)是 $t$ 的二次方程，它的判别式

$$\Delta=4[F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu]^2-4\varphi(\mu,\nu)F(x_0,y_0).$$

1.1) 若 $\Delta>0$，则 $l$ 与 $S$ 有两个不同交点；

1.2) 若 $\Delta=0$，则 $l$ 与 $S$ 有两个重合交点；

1.3) 若 $\Delta<0$，则 $l$ 与 $S$ 沒有交点，但由于(5.48)有两个共轭复根，因此称 $l$ 与 $S$ 有两个虚交点。

*情形*2. 若 $\varphi(\mu,\nu)=0$，

2.4) 若 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu\neq 0$，则(5.48)是 $t$ 的一次方程，从而 $l$ 与 $S$ 有一个交点；

2.5) 若 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0$，且 $F(x_0,y_0)=0$，则(5.48)成了恒等式，即任一实数 $t$ 都是(5.48)的解，从而整条直线 $l$ 都在二次曲线 $S$ 上；

2.6) 若 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0$，且 $F(x_0,y_0)\neq 0$，则(5.48)无解，从而 $l$ 与 $S$ 沒有交点。

**定义5.2** 设二次曲线 $S$ 的方程为(5.1)，若非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标$(\mu,\nu)$满足 $\varphi(\mu,\nu)=0$，则称 $\boldsymbol{v}$ 是 $S$ 的**渐近方向**；
若满足 $\varphi(\mu,\nu)\neq 0$，则称 $\boldsymbol{v}$ 是 $S$ 的**非渐近方向**。

**定理5.3** 椭圆型曲线（即 $I_2>0$）沒有渐近方向；双曲型曲线($I_2<0$)有两个渐近方向；抛物型曲线($I_2=0$)有一个渐近方向：

$$\mu:\nu=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}.$$

**证明** 设$\boldsymbol{v}(\mu,\nu)$是二次曲线$S$的渐近方向，则有

$$a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\nu+a_{22}\nu^2=0, \tag{5.49}$$

因为$\mu,\nu$不全为零，不妨设$\nu\neq0$，则由(5.49)得

$$a_{11}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2+2a_{12}\frac{\mu}{\nu}+a_{22}=0.$$

既然一元二次方程$a_{11}z^2+2a_{12}z+a_{22}=0$有实根$\frac{\mu}{\nu}$，因此它的判别式$\Delta=4a^{22}-4a_{11}a_{22}\geqslant0$，即$I_2\leqslant0$。这说明，$I_2>0$时，$S$没有渐近方向。

$I_2<0$时，由于$\Delta>0$，因此上述一元二次方程有两个不等实根，从而得到$S$的两个渐近方向；$I_2=0$时，由于$\Delta=0$，因此该二次方程有相等的两个实根，从而得到$S$的一个渐近方向：

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{-2a_{12}}{2a_{11}}=-\frac{a_{12}}{a_{11}},$$

由$I_2=0$还可推出

$$-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}.$$

### 3.2 二次曲线的对称中心

读者已经知道，椭圆和双曲线都有一个对称中心，而抛物线没有对称中心。其他几种二次曲线有没有对称中心？如果一条二次曲线有对称中心，如何直接从原方程求出它的对称中心？本小节就来讨论这些问题。

**定义5.3** 点$O'$称为曲线$S$的**对称中心**（简称为**中心**），如果$S$上任一点$M_1$关于$O'$的对称点$M_2$仍在$S$上。

**定理5.4** 点$O'(x_0,y_0)$是二次曲线$S$（它的方程是(5.1)）的对称中心的充分必要条件为$O'$的坐标$(x_0,y_0)$是方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\F_2(x,y)=0\end{cases} \tag{5.50}$$

的解。

**证明** 必要性。设 $O'(x_0,y_0)$ 是二次曲线 $S$ 的对称中心，任取 $S$ 的一个非渐近方向 $(\mu,\nu)$，则过 $O'(x_0,y_0)$ 且方向为 $(\mu,\nu)$ 的直线 $l$ 与 $S$ 有两个（不同的，或重合的，或虚的）交点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$。由于 $O'$ 是 $S$ 的对称中心，所以 $O'$ 是线段 $M_1M_2$ 的中点，于是

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{5.51}$$

设 $M_i$ 对应的参数值为 $t_i$，则有

$$\begin{cases}x_i=x_0+\mu t_i,\\ y_i=y_0+\nu t_i,\end{cases}\qquad i=1,2. \tag{5.52}$$

将(5.52)代入(5.51)得

$$2x_0=2x_0+\mu(t_1+t_2),\ \ 2y_0=2y_0+\nu(t_1+t_2),$$

于是得

$$\mu(t_1+t_2)=0,\ \ \nu(t_1+t_2)=0.$$

由于 $\mu,\nu$ 不全为零，因此，$t_1+t_2=0$。

因为 $M_i(i=1,2)$ 是 $l$ 与 $S$ 的交点，所以它对应的参数值 $t_i(i=1,2)$ 是 $t$ 的二次方程(5.48)的根。据韦达定理得

$$t_1+t_2=\frac{-2}{\varphi(\mu,\nu)}[F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu].$$

再由 $t_1+t_2=0$，得

$$\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)=0. \tag{5.53}$$

(5.53)对于 $S$ 的任意非渐近方向 $(\mu,\nu)$ 都成立，取 $S$ 的两个不共线的非渐近方向 $\boldsymbol{v}_1(\mu_1,\nu_1)$ 和 $\boldsymbol{v}_2(\mu_2,\nu_2)$，则得

$$\begin{cases}\mu_1F_1(x_0,y_0)+\nu_1F_2(x_0,y_0)=0,\\ \mu_2F_1(x_0,y_0)+\nu_2F_2(x_0,y_0)=0.\end{cases} \tag{5.54}$$

这说明 $(F_1(x_0,y_0),F_2(x_0,y_0))$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases}\mu_1x+\nu_1y=0,\\ \mu_2x+\nu_2y=0\end{cases} \tag{5.55}$$

的解，由于 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不共线，因此，

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

从而方程组(5.55)只有零解，所以有

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0)=0, \\ F_2(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

充分性。若点 $O'$ 的坐标$(x_0,y_0)$是方程组(5.50)的解，则

$$F_1(x_0,y_0)=0,\quad F_2(x_0,y_0)=0.$$

作移轴，使 $O'$ 为新坐标系原点，于是移轴公式为

$$\begin{cases} x=x'+x_0, \\ y=y'+y_0. \end{cases}$$

代入$S$的原方程(5.1)，得到$S$的新方程为：

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+F(x_0,y_0)=0. \qquad (5.56)$$

(5.56)中用 $-x'$ 代 $x'$，用 $-y'$ 代 $y'$，方程不变，所以 $O'$ 是 $S$ 的对称中心。

**定理5.5** $I_2\neq 0$ 时，二次曲线$S$有唯一的对称中心；$I_2=0$，且 $I_3=0$ 时，$S$ 有无穷多个对称中心，它们组成一条直线，称它是$S$的**中心直线**，其方程为 $F_1(x,y)=0$（或者 $F_2(x,y)=0$）；$I_2=0$，但 $I_3\neq 0$ 时，$S$ 没有对称中心。

**证明** 方程组(5.50)就是

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_1=0, \\ a_{12}x+a_{22}y+a_2=0. \end{cases} \qquad (5.50)'$$

显然，$I_2\neq 0$ 时，方程组(5.56)$'$有唯一解，因此 $S$ 有唯一的对称中心。

$I_2=I_3=0$ 时，据定理5.2的证明过程知，

$$a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}=a_1:a_2=l.$$

于是方程组(5.50)$'$可以写成

$$\begin{cases} l(a_{12}x+a_{22}y+a_2)=0, \\ a_{12}x+a_{22}y+a_2=0. \end{cases}$$

显然这个方程组有无穷多个解，从而$S$有无穷多个对称中心，并且它们恰好组成一条直线

$$a_{12}x+a_{22}y+a_2=0.$$

$I_2=0$，但$I_3\neq0$时，$a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}\neq a_1:a_2$，因此方程组(5.50)′无解，从而$S$沒有对称中心。

我们把具有唯一对称中心的二次曲线称为**中心型曲线**；把沒有对称中心或者有无穷多个对称中心的二次曲线称为**非中心型曲线**，其中沒有对称中心的称为**无心曲线**，有无穷多个对称中心的称为**线心曲线**。于是椭圆型和双曲型曲线都是中心型曲线；而抛物型曲线是非中心型的，其中抛物线是无心曲线，一对平行直线、一对虛平行直线、一对重合直线都是线心曲线。

## 习 题 5.3

1． 求直线

$$\begin{cases}x=2+3t,\\ y=-1+2t\end{cases}$$

与下列二次曲线的交点。

(1) $2x^2-2xy+\frac{3}{2}y^2-2x=0$；

(2) $x^2-y^2-x-y+1=0$。

2． 下列二次曲线有沒有渐近方向？若有，则求出它们。

(1) $x^2-3xy-10y^2+6x-8y=0$；

(2) $x^2+xy-2y^2-11x-y+28=0$；

(3) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$；

(4) $8x^2+8xy+2y^2-6x-3y-5=0$。

3． 求下列二次曲线的对称中心。

(1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+11=0$；

(2) $2xy-4x+2y+11=0$；

(3) $4x^2+4xy+y^2-10x-5y+6=0$；

(4) $x^2-2xy+y^2-3x+2y-11=0$。

4． 当$\lambda,\mu$满足什么条件时，二次曲线

$$x^2+6xy+\lambda y^2+3x+\mu y-4=0$$

(1) 有唯一的中心；

(2) 沒有中心；

(3) 有一条中心直线。

5． 若方程(5.1)表示一条中心型曲线，写出中心是原点的条件。

6． 设二次曲线$S$过点(2,3),(4,2),(-1,-3)，且以点(0,1)为中心，求$S$的方程。

## §4 二次曲线的直径和对称轴

我们已经知道，椭圆、双曲线和抛物线都有对称轴，如何直接从它们的原方程求出它们的对称轴？

**定义5.4** 直线$l$称为曲线$S$的**对称轴**，如果对于曲线$S$上的任一点$M_1(x_1,y_1)$，它关于直线$l$的对称点$M_2(x_2,y_2)$也在曲线$S$上。

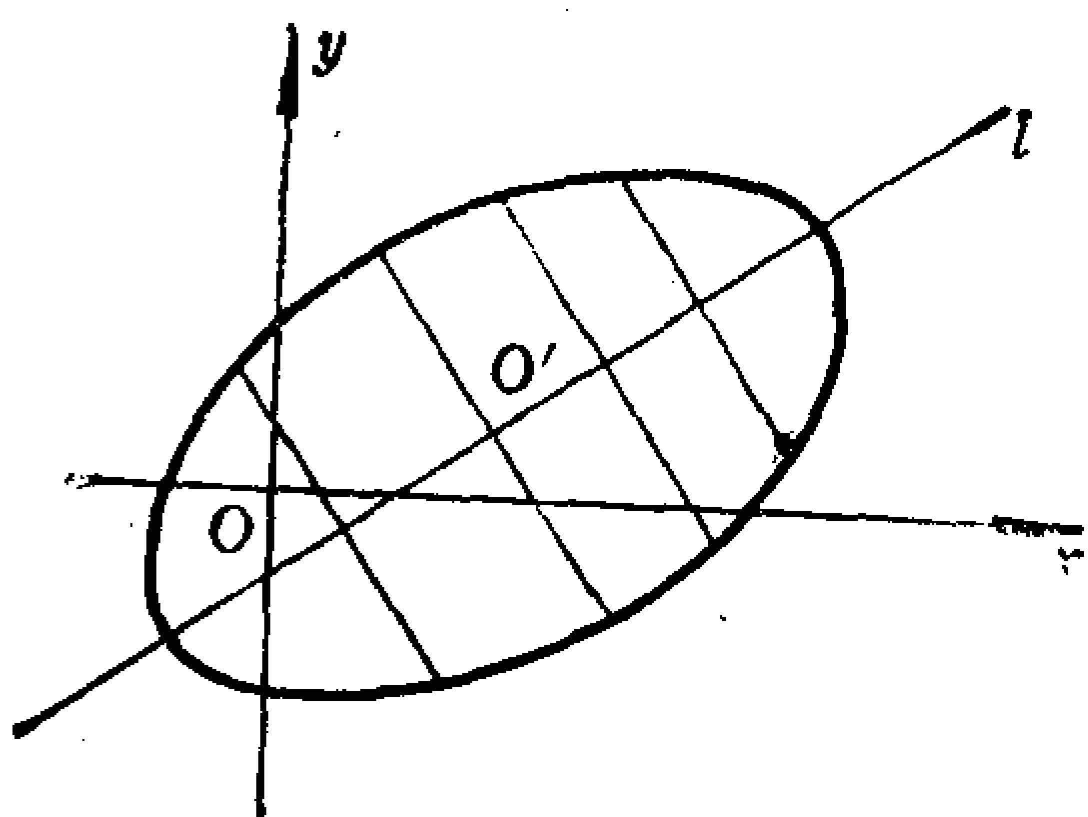



图 5.4

我们把曲线$S$上的两个点的连线段称为$S$的一条弦。从定义5.4知道，若直线$l$是圆锥曲线$S$的对称轴，则$l$经过$S$的某一组平行弦的中点，并且$l$跟这组平行弦方向垂直（如图5.4)。因此为了研究圆锥曲线$S$的对称轴，我们就先来研究$S$的一组平行弦中点所在的直线。

### 4.1 二次曲线的直径

**定理5.6** 二次曲线$S$的沿非渐近方向$(\mu,\nu)$的平行弦的中点

都在一条直线上，它的方程是

$$\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0. \tag{5.57}$$

**证明** 任取沿非渐近方向$(\mu,\nu)$的一条弦$M_1M_2$，由定理5.4的证明知，$M_1M_2$的中点的坐标满足方程

$$\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0,$$

即
$$(a_{11}\mu+a_{12}\nu)x+(a_{12}\mu+a_{22}\nu)y+a_1\mu+a_2\nu=0. \tag{5.58}$$

(5.58)的一次项系数一定不全为零，因为假如

$$\begin{cases}a_{11}\mu+a_{12}\nu=0,\\ a_{12}\mu+a_{22}\nu=0,\end{cases}$$

则得
$$\mu(a_{11}\mu+a_{12}\nu)+\nu(a_{12}\mu+a_{22}\nu)=0,$$

即
$$a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\nu+a_{22}\nu^2=0,$$

亦即
$$\varphi(\mu,\nu)=0.$$

这说明$(\mu,\nu)$是$S$的渐近方向，矛盾。因此(5.58)是$x,y$的一次方程，从而它表示一条直线。于是，沿$(\mu,\nu)$方向的平行弦的中点都在这条直线上。

**定义5.5** 二次曲线$S$的沿非渐近方向$(\mu,\nu)$的平行弦中点所在的直线称为$S$的**共轭于方向$(\mu,\nu)$的直径**。

由定理5.6知，二次曲线$S$的共轭于方向$(\mu,\nu)$的直径的方程是

$$\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0,$$

或者写成(5.58)的形式。

**推论5.1** 中心型曲线或线心曲线的直径一定经过中心。

设$l$是中心型曲线$S$的共轭于非渐近方向$(\mu_1,\nu_1)$的直径，则过中心，且方向为$(\mu_1,\nu_1)$的直线$l'$也是$S$的一条直径，事实上，易证$l'$是共轭于$l$的方向$(\mu_2,\nu_2)$的直径。因此我们把$l$和

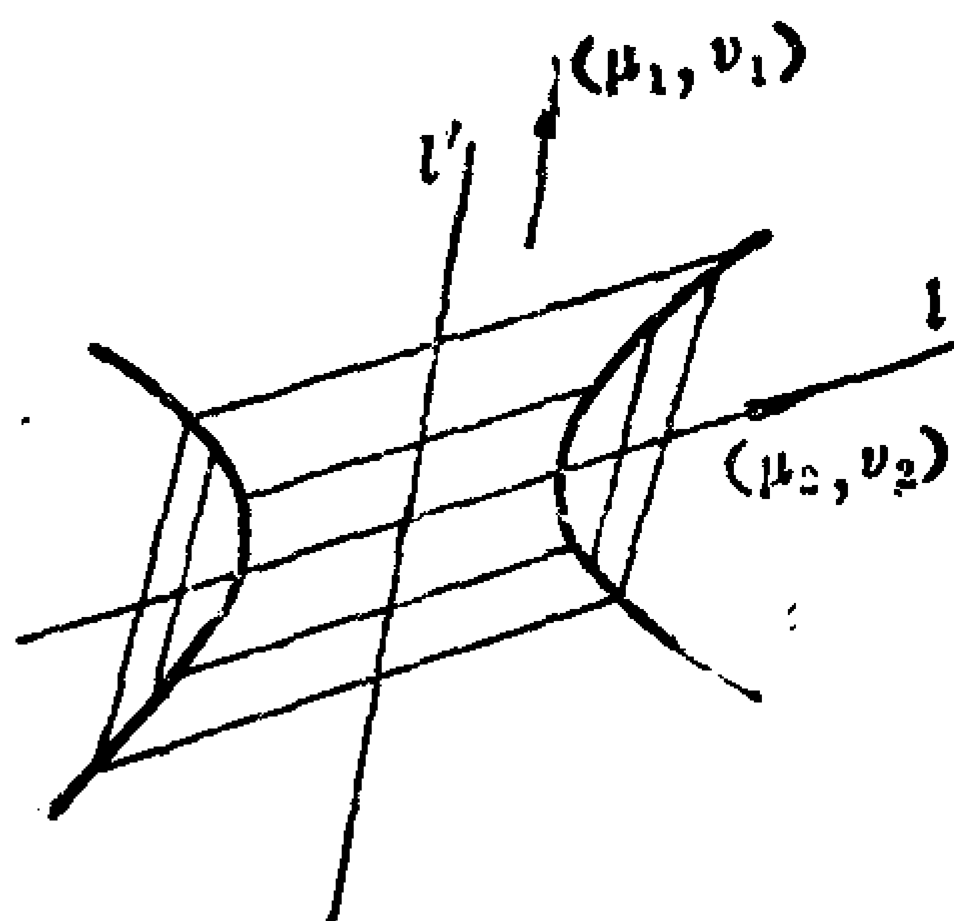



图 5.5

$l'$称为$S$的一对**共轭直径**(如图5.5)。

## 4.2 圆锥曲线的对称轴

设$l$是圆锥曲线$S$的对称轴，于是由本节开头一段知，$l$是$S$的一条直径，并且$l$与它所共轭的非渐近方向$(\mu,\nu)$垂直。因此，$l$的方程是

$$\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0,$$

即

$$(a_{11}\mu+a_{12}\nu)x+(a_{12}\mu+a_{22}\nu)y+a_1\mu+a_2\nu=0.$$

因为$l$与$(\mu,\nu)$垂直，所以有

$$-\mu(a_{12}\mu+a_{22}\nu)+\nu(a_{11}\mu+a_{12}\nu)=0,$$

即

$$(a_{11}\mu+a_{12}\nu):\mu=(a_{12}\mu+a_{22}\nu):\nu. \qquad (5.59)$$

为了从(5.59)解出$\mu:\nu$，我们以$\xi$表示(5.59)中两个比的公共比值，于是得到方程组

$$\begin{cases}(a_{11}-\xi)\mu+a_{12}\nu=0,\\ a_{12}\mu+(a_{22}-\xi)\nu=0.\end{cases} \qquad (5.60)$$

因为$\mu,\nu$不全为零，所以

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\xi & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\xi\end{vmatrix}=0,$$

即
$$\xi^2-(a_{11}+a_{22})\xi+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

亦即
$$\xi^2-I_1\xi+I_2=0.$$

这说明，(5.59)中的公共比值$\xi$是二次曲线$S$的特征根。把特征根$\xi$代入(5.60)中，求出$\mu:\nu$，这称为属于$\xi$的**主方向**，若它是非渐近方向，则将它代到(5.57)即得$S$的对称轴的方程。

椭圆和双曲线的两条对称轴显然是一对共轭直径。

**例5.6** 求下列二次曲线的对称轴。

(1) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$;

(2) $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$.

**解** (1) $I_1=2$，$I_2=-\frac{5}{4}$，$I_3=-\frac{5}{4}$.因此，这是双曲线。

解特征方程 $\lambda^2-2\lambda-\frac{5}{4}=0$，得 $\lambda_1=-\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{5}{2}$。将它们分别代替(5.60)中的$\xi$，解得，$\mu_1:\nu_1=1:1$，$\mu_2:\nu_2=-1:1$。它们都是非渐近方向，将它们代入(5.57)中，求得两条对称轴方程为：

$$\left(x-\frac{3}{2}y+5\right)+\left(-\frac{3}{2}x+y-5\right)=0,$$

$$-\left(x-\frac{3}{2}y+5\right)+\left(-\frac{3}{2}x+y-5\right)=0.$$

整理得

$$x+y=0 \text{ 和 } x-y+4=0.$$

(2) $I_1=5$，$I_2=0$，$I_3=-625$。因此，这是抛物线。解 $\lambda^2-5\lambda=0$，得 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$。用 $\lambda_1=0$ 代替(5.60)中的$\xi$，解得 $\mu_1:\nu_1=-a_{12}:a_{11}$，这是渐近方向。用 $\lambda_2=5$ 代替(5.60)中的$\xi$，解得 $\mu_2:\nu_2=1:2$，这是非渐近方向，将它代到(5.57)中便得到对称轴的方程为

$$1\cdot(x+2y-10)+2(2x+4y+5)=0,$$

即

$$x+2y=0.$$

### *4.3 从原方程的系数确定圆锥曲线的位置

我们已经会直接从原方程的系数求椭圆、双曲线的对称中心和对称轴，如果我们还能确定椭圆的对称轴哪根是长轴，双曲线的对称轴哪根是实轴，则椭圆、双曲线的位置就完全确定了。

**定理5.7** 对于椭圆，若取绝对值较小的特征根为$\lambda_1$，则椭圆的长轴方向是属于$\lambda_1$的主方向。对于双曲线，若取与$I_3$同号的特征根为$\lambda_1$，则双曲线的实轴的方向是属于$\lambda_1$的主方向。

**证明** 对于椭圆$S$，设它在原直角坐标系 I $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$中的

方程是(5.1)，作转轴 $\mathrm{I}[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]\longrightarrow\mathrm{II}[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$ 消去交叉项，再作移轴 $\mathrm{II}[O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']\longrightarrow\mathrm{III}[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$ 使得 $S$ 的新方程为：

$$\lambda_1 x^{*2}+\lambda_2 y^{*2}+\frac{I_3}{I_2}=0,$$

若 $\lambda_1$ 是绝对值较小的特征根，则易看出椭圆的长轴在 $x^*$ 轴上，即长轴方向为 $\boldsymbol{e}_1'$。设 $\boldsymbol{e}_1'$ 的 I 坐标为 $(b_{11},b_{21})$，$\boldsymbol{e}_2'$ 的 I 坐标为 $(b_{12},b_{22})$。则转轴公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

其中 I 到 II 的过渡矩阵

$$T=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵。转轴后的方程的二次项部分的矩阵为 $T^tAT$。由于再作移轴时，二次项的系数不改变，因此转轴后的方程的二次项系数为：

$$a_{11}'=\lambda_1,\quad a_{22}'=\lambda_2,\quad a_{12}'=0.$$

因此有

$$T^tAT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

因为 $T^t=T^{-1}$，所以由上式得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

比较等式两边的矩阵的(1,1)元和(2,1)元，得

$$\begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=\lambda_1 b_{11}, \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21}=\lambda_1 b_{21}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)b_{11}+a_{12}b_{21}=0,\\ a_{12}b_{11}+(a_{22}-\lambda_1)b_{21}=0.\end{cases}$$

于是看出 $b_{11}:b_{21}$ 就是属于 $\lambda_1$ 的主方向，也就是长轴的方向 $e_1'$ 就是属于 $\lambda_1$ 的主方向。

对于双曲线 $S$，同上作转轴和移轴，使新方程为 $\lambda_1 x^{*2}+\lambda_2 y^{*2}+\frac{I_3}{I_2}=0$，若取 $\lambda_1$ 是与 $I_3$ 同号的特征根，则易看出双曲线的实轴在 $x^*$ 轴上，即实轴的方向是 $e_1'$。由于上面已经证明了 $e_1'(b_{11},b_{21})$ 就是属于 $\lambda_1$ 的主方向，因此，双曲线的实轴方向是 $\lambda_1$ 的主方向。

**例5.7** 对于下述二次曲线，直接从原方程系数确定它的类型、形状和位置，并且画图。

$$x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0.$$

**解** 在例5.4(1)中已算出：

$$I_1=2,\quad I_2=-\frac{5}{4},\quad I_3=-\frac{5}{4},$$

这是双曲线。它的两个特征根为：

$$\lambda_1=-\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{5}{2}.$$

它的标准方程是

$$\frac{x^{*2}}{2}-\frac{5}{2}y^{*2}=1.$$

实半轴 $a=\sqrt{2}$，虚半轴 $b=\frac{1}{5}\sqrt{10}$。

为了确定它的位置，先求它的对称中心，解方程组

$$\begin{cases}x-\frac{3}{2}y+5=0,\\ -\frac{3}{2}x+y-5=0,\end{cases}$$

得 $x=-2$，$y=2$。因此对称中心 $O'$ 为 $(-2,2)$。

再求对称轴，分别用 $\lambda_1,\lambda_2$ 代入(5.60)中的 $\xi$，解得

$$\mu_1:\nu_1=1:1,\quad \mu_2:\nu_2=-1:1.$$

由于双曲线的对称轴必过中心，所以方向为(1,1)的对称轴（即实轴）$l_1$ 的方程是：

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{1},$$

即
$$x-y+4=0.$$

方向为(-1,1)的对称轴 $l_2$ 的方程是：

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{1},$$

即
$$x+y=0.$$

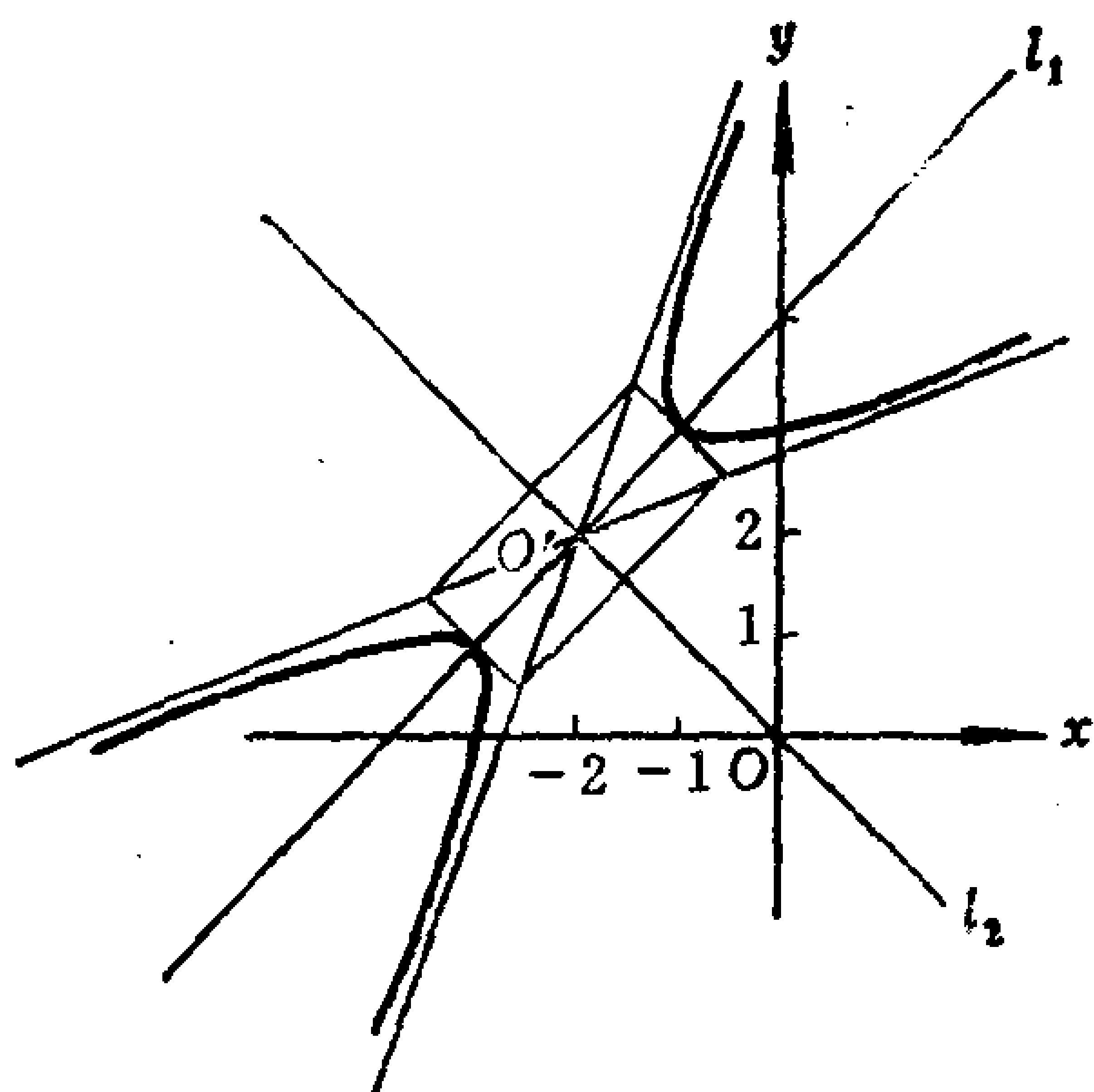



图 5.6

对于抛物线，我们已经会从原方程的系数求出它的一根对称轴，如果还能求出它的顶点以及能确定开口方向，则抛物线的位置也就完全确定了。抛物线的顶点是抛物线本身与它的对称轴的交点；至于抛物线的开口方向如何简单易行地确定，可以从下面例子中受到启发。

**例5.8** 对于下述二次曲线，直接从原方程的系数确定它的类型、形状和位置，并且画图。

$$x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0.$$

**解** 在例5.4(2)中已算出

$$I_1=5,\quad I_2=0,\quad I_3=-625,$$

这是抛物线。它的标准方程为

$$y^{*2}=2\sqrt{5}\,x^*.$$

在例 5.6(2)中已求出它的对称轴的方程是

$$x+2y=0.$$

方程组

$$\begin{cases}x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0,\\ x+2y=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(x+2y)^2-20x+10y-50=0,\\ x+2y=0,\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}-20x+10y-50=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$$

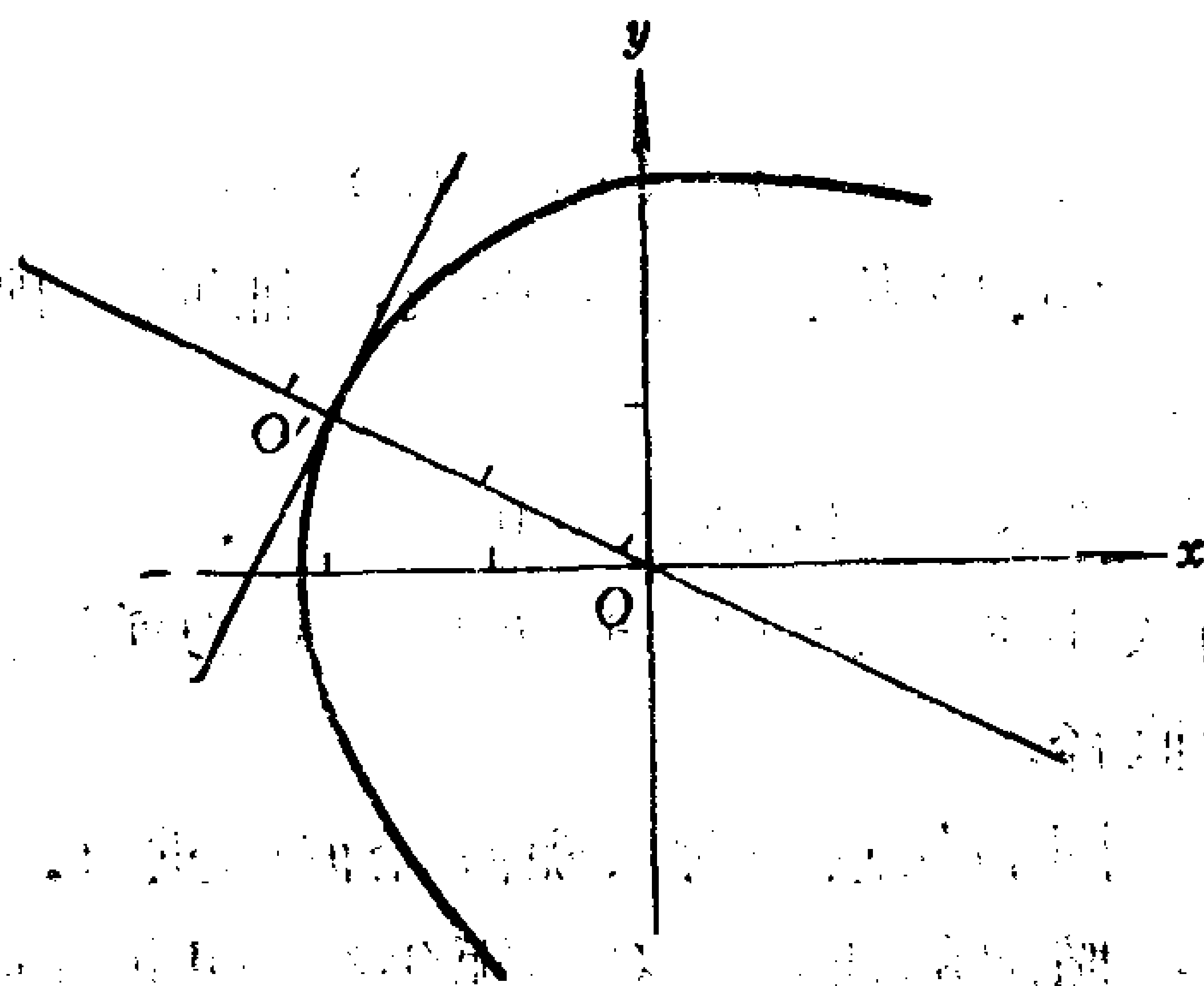



图 5.7

解得 $x=-2$，$y=1$。所以顶点 $O'$ 为$(-2,1)$。

考虑顶点右边的直线 $x=0$ 与抛物线有无交点，为此看方程组

$$\begin{cases}x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0,\\ x=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4y^2+10y-50=0,\\x=0.\end{cases}$$

由于第一个方程的判别式

$$\Delta=10^2-4\times4\times(-50)>0,$$

所以此方程有实根，从而 $x=0$ 与抛物线有交点，因此抛物线的开口应当向右。

## 习 题 5.4

1． 求下列二次曲线的对称轴。

(1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

(2) $2xy-4x+2y-3=0$;

(3) $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0$.

2． 若 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_0=0$ 表示椭圆或双曲线，证明：对称轴是

$$a_{12}(x^2-y^2)-(a_{11}-a_{22})xy=0.$$

3． 若方程(5.1)表示一条抛物线，证明：顶点是原点的充分必要条件为：

$$a_{11}a_1^2+a_{22}a_2^2+2a_{12}a_1a_2=0,\quad a_0=0.$$

4． 求曲线 $4xy-5y^2+2x+6y+1=0$ 的通过点$(-4,2)$的直径和它的共轭直径。

5． 证明：圆的任意一对共轭直径彼此垂直。

6． 证明：椭圆的任意一对共轭半径(即共轭直径上由中心到椭圆上一点的距离)的长度的平方和是一常数。

7． 椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的一条弦在点$(2,1)$被等分，求出这条弦的斜率。

8． 求双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$的被点$(5,1)$平分的弦与曲线的两个交点。

9． 证明：抛物型曲线的直径的方向一定是它的渐近方向，

10．证明：对于抛物线，沿渐近方向的每一条直线都是它的直径。

11．证明：对于中心型曲线，过中心且沿非渐近方向的直线都是它的直径。

*12． 直接由方程的系数确定下列二次曲线的类型、形状和位置，并且画图。

(1) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$；

(2) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$；

(3) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$；

(4) $x^2-4xy+4y^2+8y+3=0$。

*13． 求经过点$(-2,-1)$和$(0,-2)$，且以直线

$$x+y+1=0,\quad x-y+1=0$$

为对称轴的二次曲线的方程。

*14． 设一条二次曲线$S$经过两条二次曲线

$$x^2+xy-2y^2+6x-1=0 \text{ 和 } 2x^2-y^2-x-y=0$$

的四个交点，并且还经过$(2,-2)$，求$S$的方程。

## §5 二次曲线的切线，双曲线的渐近线

### 5.1 二次曲线的切线和法线

**定义5.6** 直线$l$如果与二次曲线$S$有两个重合的交点或者$l$在$S$上，则称$l$是$S$的**切线**，$l$与$S$的交点称为**切点**。

首先来讨论怎样求经过二次曲线$S$上的一点$M_0(x_0,y_0)$的切线$l$。设切线$l$的方向是$(\mu,\nu)$，则$l$的参数方程是：

$$\begin{cases}x=x_0+\mu t, \\ y=y_0+\nu t,\end{cases}\qquad -\infty<t<+\infty.$$

代入二次曲线$S$的方程(5.1)中，得

$$\varphi(\mu,\nu)t^2+2[\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)]t+F(x_0,y_0)=0. \tag{5.48}$$

既然 $l$ 是 $S$ 的切线，因此 $l$ 或者与 $S$ 有两个重合的交点，或者 $l$ 在 $S$ 上。在前一情形有 $\varphi(\mu,\nu)\neq 0$，且 $t$ 的二次方程(5.48)的判别式 $\Delta=0$，由于 $M_0(x_0,y_0)$ 在 $S$ 上，于是

$$\begin{aligned}\Delta &= 4[\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)]^2-4\varphi(\mu,\nu)F(x_0,y_0)\\ &= 4[\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)]^2.\end{aligned}$$

因此
$$\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)=0. \tag{5.61}$$
在后一情形，有 $\varphi(\mu,\nu)=0$，且

$$\mu F_1(x_0,y_0)+\nu F_2(x_0,y_0)=0.$$

总之，过二次曲线 $S$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$ 的直线 $l$ 如果是 $S$ 的切线，则 $l$ 的方向 $(\mu,\nu)$ 应满足(5.61)。反之，如果这样的直线 $l$ 的方向 $(\mu,\nu)$ 满足(5.61)，则 $l$ 或者在 $S$ 上（当 $\varphi(\mu,\nu)=0$），或者与 $S$ 有两个重合的交点(当 $\varphi(\mu,\nu)\neq 0$)，从而 $l$ 是 $S$ 的切线。

**情形1.** $F_1(x_0,y_0)$ 与 $F_2(x_0,y_0)$ 不全为零，则由(5.61)得

$$\mu:\nu=-F_2(x_0,y_0):F_1(x_0,y_0), \tag{5.62}$$

因此过二次曲线 $S$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$ 的切线 $l$ 的方程为

$$\frac{x-x_0}{-F_2(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_1(x_0,y_0)},$$

即

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0. \tag{5.63}$$

**情形2.** $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$。此时任一方向 $(\mu,\nu)$ 都满足(5.61)，从而过 $M_0(x_0,y_0)$ 的任意一条直线都是 $S$ 的切线。

从上述讨论得到

**定理5.8** 设二次曲线 $S$ 的方程为(5.1)，$M_0(x_0,y_0)$ 是 $S$ 上的一个点，如果 $F_1(x_0,y_0)$ 与 $F_2(x_0,y_0)$ 不全为零，则过 $M_0$ 存在 $S$ 的唯一的一条切线，它的方程是

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0.$$

如果 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$，则过 $M_0$ 的每一条直线都是 $S$ 的切线。

**定义5.7** 如果过曲线 $S$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$ 的每一条直线都

是 $S$ 的切线，则称点 $M_0$ 是曲线 $S$ 的**奇(异)点**。

现在再来讨论怎样求过二次曲线外一点 $M_1(x_1,y_1)$ 的切线 $l$，此时 $l$ 不可能整条直线在 $S$ 上，因此 $l$ 必与 $S$ 有两个重合的交点。设 $l$ 的方向为 $(\mu,\nu)$，则它应满足

$$[\mu F_1(x_1,y_1)+\nu F_2(x_1,y_1)]^2-\varphi(\mu,\nu)F(x_1,y_1)=0. \qquad (5.64)$$

因为 $l$ 的方程为

$$\frac{x-x_1}{\mu}=\frac{y-y_1}{\nu},$$

所以对于切线 $l$ 上的任意一个点 $(x,y)$，都有

$$\mu:\nu=(x-x_1):(y-y_1).$$

不妨就取 $\mu=x-x_1$，$\nu=y-y_1$，代入(5.64)得

$$[(x-x_1)F_1(x_1,y_1)+(y-y_1)F_2(x_1,y_1)]^2 -\varphi(x-x_1,y-y_1)F(x_1,y_1)=0. \qquad (5.65)$$

(5.65)的左端是 $(x-x_1)$，$(y-y_1)$ 的二次齐次多项式，当它可以分解成两个实系数一次因式的乘积时，便得到两条切线。

**例5.9** 求二次曲线 $x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点 $(0,2)$ 的切线。

**解** 因为 $F(0,2)=3\neq0$，所以 $(0,2)$ 不在曲线上。

$$F_1(0,2)=-1,\quad F_2(0,2)=2,$$

$$\varphi(x-0,y-2)=x^2-x(y-2)+(y-2)^2.$$

由(5.65)得

$$[(-1)(x-0)+2(y-2)]^2-3[x^2-x(y-2)+(y-2)^2]=0,$$

即

$$2x^2+x(y-2)-(y-2)^2=0.$$

将左端分解因式得

$$[2x-(y-2)][x+(y-2)]=0.$$

于是得到过 $(0,2)$ 的两条切线的方程分别为：

$$2x-y+2=0 \text{ 和 } x+y-2=0.$$

注意在计算过程中不要把 $(x-0)$，$(y-2)$ 的括号去掉。

**定义5.8** 过曲线上一点，且垂直于过该点的切线的直线称为曲线在这点的**法线**。

设 $M_0(x_0,y_0)$是二次曲线 $S$ 上一点，当 $F_1(x_0,y_0)$与$F_2(x_0,y_0)$不全为零时，过 $M_0$ 的切线方向是

$$-F_2(x_0,y_0):F_1(x_0,y_0),$$

从而过 $M_0$ 的法线方向是

$$F_1(x_0,y_0):F_2(x_0,y_0),$$

因此过 $M_0$ 的法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_1(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_2(x_0,y_0)}.$$

## 5.2 双曲线的渐近线

**定义5.9** 沿渐近方向并且与双曲线 $S$ 没有交点的直线 $l$ 称为双曲线 $S$ 的**渐近线**。

设$(\mu_i,\nu_i)$，$i=1,2$，是双曲线 $S$ 的渐近方向。设 $l_i$ 是方向为$(\mu_i,\nu_i)$的渐近线，因为 $l_i$ 与 $S$ 无交点，所以 $l_i$ 上任意一点 $M_0(x_0,y_0)$满足方程

$$\mu_iF_1(x,y)+\nu_iF_2(x,y)=0. \tag{5.66}$$

从而这就是渐近线 $l_i$ 的方程。

因为双曲线的中心 $O_1$ 的坐标$(x_1,y_1)$满足

$$F_1(x_1,y_1)=0,F_2(x_1,y_1)=0,$$

所以中心必在渐近线上。于是双曲线的渐近线也就是经过中心，且方向为渐近方向的直线。

最后我们指出，本章 §3，§4，§5 的内容除了涉及对称轴和法线的内容外，其余均可在仿射坐标系中进行讨论，并且可得到同样的有关结论。

## 习 题 5.5

1. 求下列二次曲线在指定点处的切线方程和法线方程。

(1) 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的点$(x_0,y_0)$处；

(2) 在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的点$(x_0,y_0)$处；

(3) 在抛物线$y^2=2px$上的点$(x_0,y_0)$处。

2． 求下列二次曲线的经过所给点的切线方程。

(1) $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$，点$(2,1)$；

(2) $5x^2+7xy+y^2-x+2y=0$，原点；

(3) $5x^2+6xy+5y^2=8$，点$(0,2\sqrt{2})$；

(4) $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$，点$(0,2)$。

3． 求曲线$4x^2-4xy+y^2-2x+1=0$的过点$M_0(1,3)$的切线和法线方程。

4． 求下列二次曲线的切线方程，并且求出切点的坐标。

(1) $x^2+4xy+3y^2-5x-6y+3=0$的切线平行于$x+4y=0$；

(2) $x^2+xy+y^2=3$的切线平行于$x$轴。

5． 证明：过二次曲线与它的一条直径的交点的切线一定平行于此直径的共轭方向。

6． 已知方程$(A_1x+B_1y+C_1)^2+2(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0,\quad A_1A_2+B_1B_2=0.$$

证明：(1) 它表示抛物线；

(2) 直线$A_1x+B_1y+C_1=0$是它的对称轴；

(3) 直线$A_2x+B_2y+C_2=0$是过顶点的切线。

7． 证明：抛物线$y^2=2px$的切点为$(x_1,y_1)$的切线与$x$轴的交点为$(-x_1,0)$。

*8．从椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的两个焦点$F_1$和$F_2$分别作椭圆的任意切线的垂线，垂足记为$T_1$和$T_2$。证明：$T_1$的轨迹和$T_2$的轨迹是以原点为中心的同一个圆。

*9．证明：两条边都与椭圆相切的直角的顶点$(x_0,y_0)$的轨

迹是一个圆。

*10. 证明：两条边与抛物线相切的直角的顶点位于准线上，而连接切点的直线通过焦点。

*11. 已知三角形 $ABC$，$E$ 是 $AB$ 中点，抛物线与 $CA$, $CB$ 分别在 $A$, $B$ 相切。证明 $EC$ 与抛物线的对称轴平行。

12. 求下列双曲线的渐近线，并且求曲线在以渐近线为坐标轴的坐标系中的方程。

(1) $12x^2-7xy-12y^2-17x+31y-13=0$;

(2) $6x^2+5xy-6y^2-39x+26y-13=0$.

13. 证明：若方程(5.1)表示一条双曲线，则它的渐近线分别与方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ 所代表的两条相交直线平行。

14. 证明：若 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_0=0$ 表示一条双曲线，则它的渐近线是 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$.

15. 证明：若方程

$$AB(x^2-y^2)-(A^2-B^2)xy=C$$

中，$C\neq 0$，$A$ 与 $B$ 不全为零，则它表示一条双曲线，并且求出它的渐近线。

16. 证明：双曲线上的点到它的两条渐近线的距离的乘积等于常数。

*17. 给定方程

$$(A_1x+B_1y+C_1)^2-(A_2x+B_2y+C_2)^2=1,$$

其中 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$，证明它表示一条双曲线，并且求出它的渐近线。

# 第六章　正交变换和仿射变换

迄今为止，我们在研究图形的性质时，采用了坐标法和向量法，还采用了坐标变换法。这些方法是解析几何中最基本的方法，也是最重要的方法。此外，在研究图形的一些较复杂的性质时，还可以采用一种新的方法。譬如，试证：椭圆的任意一对共轭直径把椭圆分成四块面积相等的部分。如果用坐标法或坐标变换法去证都比较麻烦，有没有比较简单的办法来证它呢？由于圆的任意一对共轭直径都彼此垂直，因此圆是具有上述性质的。这促使我们设想，如果有一种变换能把椭圆变成圆，并且这种变换把椭圆的一对共轭直径变成圆的一对共轭直径，而且使变换后图形的面积与原图形的面积的比值是一个常数(对各种图形都一样)，那末就能证明椭圆也具有上述性质。这种方法称为点变换法，它的要点是：1) 通过平面上的点变换 $\sigma$ 把图形 $S$ 变成图形 $S'$；2) $S$ 与 $S'$ 共同具有在这种点变换下不变的性质。

这一章就是要研究平面上以及空间中最常用的两种点变换：正交变换和仿射变换。为此先要介绍映射的概念。

## §1　映　射

### 1.1　映射的定义和例

**定义6.1**　集合 $S$ 到集合 $S'$ 的一个映射 $\sigma$ 是指一个法则，它使 $S$ 中每一个元素 $a$ 都有 $S'$ 中一个确定的元素 $a'$ 与之对应。$a'$ 称为 $a$ 在映射 $\sigma$ 下的**象**，记作 $\sigma(a)$；$a$ 称为 $a'$ 在 $\sigma$ 下的**原象**。此映射 $\sigma$ 记作：

$$\sigma: S\to S', \quad a\mapsto a'.$$

或者记作：$a'=\sigma(a)$，$a\in S$.

集合 $S$ 到自身的映射称为 $S$ 的一个**变换**。

集合 $S$ 到 $S'$ 的两个映射 $\sigma$ 和 $\tau$ 称为**相等**，如果对于任意 $a\in S$，都有 $\sigma(a)=\tau(a)$。

**例6.1** 定义域为 $(-\infty,\infty)$，函数值为实数的单值函数 $y=f(x)$ 就是实数集合 $\boldsymbol{R}$ 到它自身的映射。例如，$y=2^x, y=x^3+x^2+1$，$y=\sin x$，等等，都是 $\boldsymbol{R}$ 到自身的映射。但是 $y=\ln x$ 是正实数集合 $\boldsymbol{R}^+$ 到实数集合 $\boldsymbol{R}$ 的映射。

**例6.2** 集合 $S$ 的一个变换 $\sigma$ 如果把 $S$ 的每个元素 $a$ 对应到它自身，即，$\sigma(a)=a$，$\forall a\in S$，则称 $\sigma$ 是 $S$ 的**恒等变换**或**单位变换**，记作 $\varepsilon_S$。

**例6.3** 设 $S$ 是平面上所有点组成的集合，取定一个直角坐标系 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，给定一个向量 $\boldsymbol{v}(a,b)$。令 $\sigma$ 是 $S$ 的这样一个变换，它使平面上每一个点 $P(x,y)$ 对应到一个确定的点 $P'(x',y')$，其中

$$\begin{cases}x'=x+a,\\ y'=y+b.\end{cases}\tag{6.1}$$

亦即

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}.\tag{6.1$'$}$$

由于向量 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 $(x'-x,y'-y)=(a,b)$，所以 $\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{v}$。这说明，变换 $\sigma$ 使平面上每一个点 $P$ 都沿方向 $\boldsymbol{v}$ 移动了长为 $|\boldsymbol{v}|$ 的一段距离。称由(6.1)确定的变换 $\sigma$ 是由 $\boldsymbol{v}$ 决定的**平移**。公式(6.1)称为平面上点的**平移公式**，它在形式上与点的坐标变换中的移轴公式类似，但是含意却完全不同：点的平移公式(6.1)中，$(x,y)$ 和 $(x',y')$ 是不同的两个点在同一个坐标系中的坐标；而移轴公式中，

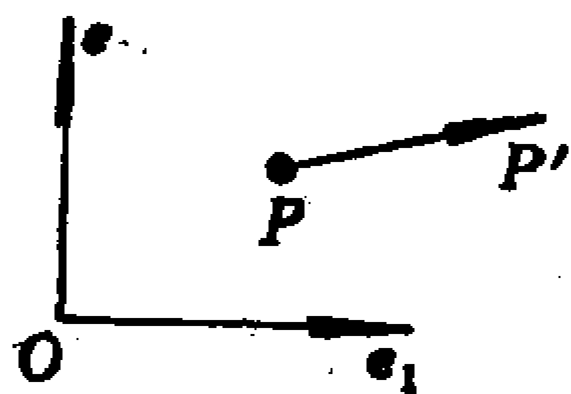


图 6.1

$(x,y)$和$(x',y')$是同一个点在两个不同的坐标系中的坐标。

**例6.4** 仍设$S$是平面上所有点组成的集合.在平面上取定一个直角坐标系$[O;e_1,e_2]$。令$\tau$是$S$的这样一个变换，它使平面上每一个点$P(x,y)$对应到一个确定的点$P'(x',y')$，其中

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

这里$\theta$是一个确定的实数。我们把(6.2)中的系数矩阵简记作$T$，易看出$T$是正交矩阵。因为

$$|\overrightarrow{OP'}|^2 = x'^2 + y'^2 = (x',y')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x,y)T^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x,y)E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+y^2 = |\overrightarrow{OP}|^2,$$

$$\cos\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP'}\rangle = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OP'}|} = \frac{xx'+yy'}{|\overrightarrow{OP}|^2}$$

$$= \frac{x(x\cos\theta - y\sin\theta) + y(x\sin\theta + y\cos\theta)}{x^2+y^2}$$

$$= \cos\theta,$$

所以变换$\tau$使平面上每一个点$P$都绕$O$点旋转$\theta$角。称由(6.2)确定的变换$\tau$是**平面绕原点的旋转**，且转角为$\theta$。公式(6.2)在形式上与转轴公式相似，但是含意完全不同，请读者想一想。

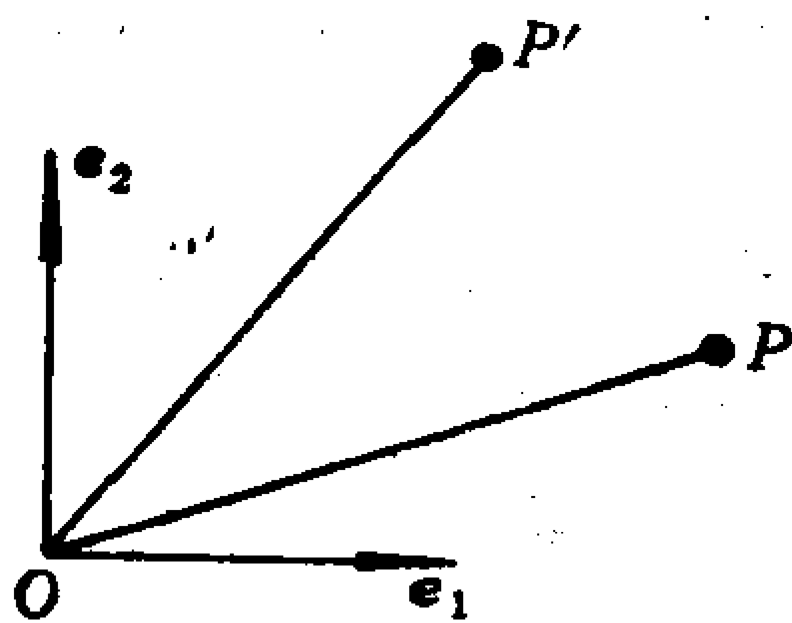



图 6.2

**定义6.2** 集合$S$到$S'$的映射$\sigma$如果使不同元素的象也不

同，即，如果 $a_1 \neq a_2$，则 $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$，那末称 $\sigma$ 是**单射**（或1-1的映射）。

显然，平面上任一平移，任一绕原点的旋转都是单射；函数 $y=2^x$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到自身的单射；而函数 $y=\sin x$ 不是单射。

**定义6.3** 集合 $S$ 到 $S'$ 的映射 $\sigma$，如果对于 $S'$ 中每一个元素 $a'$，在 $S$ 中都有至少一个元素 $a$ 使得 $\sigma(a)=a'$，则称 $\sigma$ 是**满射**（或称 $\sigma$ 是 $S$ 到 $S'$ 上的映射）。

显然，平面上任一平移，任一绕原点的旋转都是满射；函数 $y=x^3$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到自身的满射；而 $y=2^x$ 不是 $\boldsymbol{R}$ 到自身的满射，但它是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^+$ 的满射。

**定义6.4** 集合 $S$ 到 $S'$ 的映射 $\sigma$ 如果既是单射，又是满射，则称 $\sigma$ 是**双射**（或称 $\sigma$ 是 $S$ 到 $S'$ 的**一一对应**，或称 $\sigma$ 是 $S$ 到 $S'$ 上的1-1映射）。

## 1.2 映射的乘法

在许多问题中，我们需要相继作两次映射，为此引进下述定义。

**定义6.5** 设 $\sigma: S \to S'$；$\tau: S' \to S''$。相继施行映射 $\sigma$ 和 $\tau$，得到一个 $S$ 到 $S''$ 的映射称为 $\tau$ 乘以 $\sigma$ 的**乘积**，记作 $\tau\sigma$。即

$$(\tau\sigma)(a) := \tau(\sigma(a)), \quad \forall a \in S.$$

注意映射的乘法与次序有关，有可能 $\tau\sigma$ 有意义，但是 $\sigma\tau$ 无意义；即使 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$ 都有意义，也有可能 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$。这就是说，映射的乘法不适合交换律。

**例6.5** 设 $\sigma$ 是平面绕原点的旋转，转角为 $\theta$；设 $\tau$ 是由 $\boldsymbol{v}$ 决定的平移，$\boldsymbol{v}$ 的坐标为 $(a,b)$，求 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$。

**解** 在给定的直角坐标系中，$\sigma$ 的公式是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$\tau$ 的公式是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

设 $P(x, y) \overset{\tau}{\mapsto} P''(x'', y'') \overset{\sigma}{\mapsto} P'(x', y')$，则 $\sigma\tau$ 的公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right],$$

即

$$\begin{cases} x' = (x+a)\cos\theta - (y+b)\sin\theta, \\ y' = (x+a)\sin\theta + (y+b)\cos\theta. \end{cases} \tag{6.3}$$

设 $Q(x, y) \overset{\sigma}{\mapsto} Q''(x'', y'') \overset{\tau}{\mapsto} Q'(x', y')$，则 $\tau\sigma$ 的公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b. \end{cases} \tag{6.4}$$

比较(6.3)和(6.4)知，$\sigma\tau \neq \tau\sigma$。

**定理6.1** 映射的乘法适合结合律，即设

$$\sigma: S \to S';\quad \tau: S' \to S'';\quad \psi: S'' \to S''',$$

则

$$\psi(\tau\sigma) = (\psi\tau)\sigma.$$

**证明** 显然等式两边都是 $S$ 到 $S'''$ 的映射。任 $a \in S$，有

$$[\psi(\tau\sigma)](a) = \psi[(\tau\sigma)(a)] = \psi(\tau(\sigma(a))),$$

$$[(\psi\tau)\sigma](a) = (\psi\tau)(\sigma(a)) = \psi(\tau(\sigma(a))).$$

因此

$$[\psi(\tau\sigma)](a) = [(\psi\tau)\sigma](a),$$

从而

$$\psi(\tau\sigma) = (\psi\tau)\sigma,$$

## 1.3 可逆映射和逆映射

**定义6.6** 设 $\sigma: S \to S'$，如果存在 $\tau: S' \to S$，使得

$$\tau\sigma = \varepsilon_S,\quad \sigma\tau = \varepsilon_{S'},$$

则称映射 $\sigma$ 是**可逆的**，此时称 $\tau$ 是 $\sigma$ 的**逆映射**。

如果 $\sigma$ 是可逆的，则它的逆映射是唯一的，这是因为假如 $\tau$

和$\tau_1$都是$\sigma$的逆映射，则有

$$\tau_1\sigma\tau=(\tau_1\sigma)\tau=\varepsilon_S\tau=\tau,$$

$$\tau_1\sigma\tau=\tau_1(\sigma\tau)=\tau_1\varepsilon_{S'}=\tau_1,$$

从而$\tau=\tau_1$。把$\sigma$的唯一的逆映射记作$\sigma^{-1}$。

**定理6.2** 设$\sigma$是$S$到$S'$的映射，则$\sigma$是可逆的充分必要条件为$\sigma$是双射。

**证明** 必要性。若$\sigma$是可逆的，则有逆映射$\sigma^{-1}$存在，使得

$$\sigma\sigma^{-1}=\varepsilon_{S'},\quad \sigma^{-1}\sigma=\varepsilon_S.$$

如果对于$a_i\in S$，$i=1,2$，有$\sigma(a_1)=\sigma(a_2)$，则得

$$\sigma^{-1}(\sigma(a_1))=\sigma^{-1}(\sigma(a_2)),$$

从而得$(\sigma^{-1}\sigma)(a_1)=(\sigma^{-1}\sigma)(a_2)$，即$\varepsilon_S(a_1)=\varepsilon_S(a_2)$。于是$a_1=a_2$。这说明$\sigma$是单射。

任$a'\in S'$，令$a=\sigma^{-1}(a')$，则有

$$\sigma(a)=\sigma(\sigma^{-1}(a'))=(\sigma\sigma^{-1})(a')=\varepsilon_{S'}(a')=a',$$

所以$\sigma$是满射。从而$\sigma$是双射。

充分性。设$\sigma$是双射。任取$a'\in S'$，则存在唯一的$a\in S$，使得$\sigma(a)=a'$。于是可以定义

$$\tau:\ S'\to S,\quad a'\mapsto a,$$

其中$a$满足$\sigma(a)=a'$。显然$\tau$是$S'$到$S$的映射，并且有

$$\sigma\tau(a')=\sigma(a)=a',\qquad \forall a'\in S',$$

因此，$\sigma\tau=\varepsilon_{S'}$。

任$a\in S$，记$\sigma(a)=a'$，则有

$$\tau\sigma(a)=\tau(a')=a,$$

因此，$\tau\sigma=\varepsilon_S$。从而$\sigma$是可逆的映射。

**例6.6** 设$\sigma$是平面的一个点变换，它的公式是

$$\begin{cases}x'=2x+y+5,\\ y'=3x-y+7.\end{cases}$$

求$\sigma$的逆变换$\sigma^{-1}$。

**解** 若$\sigma$把点$P(x,y)$对应到点$P'(x'y')$，则$\sigma^{-1}$应把点

$P'(x_1', y')$对应到点 $P(x, y)$，因此为了得到 $\sigma^{-1}$ 的公式，只要从 $\sigma$ 的公式中反解出 $x$，$y$：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}x' + \frac{1}{5}y' - \frac{12}{5}, \\ y = \frac{3}{5}x' - \frac{2}{5}y' - \frac{1}{5}. \end{cases}$$

为了统一起见，对于每一个变换的公式，都把原象的坐标写成 $(x, y)$，把象的坐标写成 $(x', y')$，因此 $\sigma^{-1}$ 的公式为：

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{12}{5}, \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}. \end{cases}$$

## 习 题 6.1

1. 设 $\boldsymbol{R}$ 是全体实数组成的集合，判别下列对应法则是否为 $\boldsymbol{R}$ 到自身的映射？是否单射？是否满射？

(1) $x \mapsto x^2$；　　(2) $x \mapsto x^3$；

(3) $x \mapsto 2x+1$；　　(4) $x \mapsto x^2 - x$；

(5) $x \mapsto 2^x$；　　(6) $x \mapsto \ln x$；

(7) $x \mapsto \cos x$；　　(8) $x \mapsto \operatorname{tg} x$。

2. 设 $S$ 表示平面上所有点组成的集合，$l$ 是平面上一条直线。把平面上每一个点 $P(x, y)$ 对应到它关于 $l$ 的对称点 $P'(x', y')$，这是 $S$ 的一个变换，称它是平面对于直线 $l$ 的**反射**，称 $l$ 是**反射轴**。求平面对于 $x$ 轴的反射的公式。

3. 求出平面对于直线 $y = x$ 的反射公式。

4. 设平面上直线 $l$ 的方程为 $Ax + By + C = 0$，求平面对于直线 $l$ 的反射的公式。

5. 设 $l_1, l_2$ 是平面上两条平行直线，而 $\tau_1, \tau_2$ 分别是平面对于直线 $l_1, l_2$ 的反射，证明：$\tau_1\tau_2$ 是一个平移。

6. 设 $\sigma$ 是平面的点变换，$\sigma$ 的公式为

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 1, \\ y' = x - y + 3. \end{cases}$$

问：点(1,0)，(−1,1)分别变成什么点？直线 $x+y-2=0$ 变成什么图形？

7. 给了平面的两个点变换 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$，它们的公式分别是

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 5, \\ y' = 3x - y + 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x - 3y + 4, \\ y' = -x + 2y - 5. \end{cases}$$

求 $\sigma_1\sigma_2$ 和 $\sigma_2\sigma_1$ 的公式。

8. 求平面的下列点变换的逆变换。

$$(1)\ \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1; \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x' = 2x + 3y - 7, \\ y' = 3x + 5y - 9. \end{cases}$$

9. 在直角坐标系 $[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$ 中，求出平面绕点 $M_0(x_0,y_0)$ 旋转 $\theta$ 角的变换公式。

10. 设 $\sigma$: $S\to S'$；$\tau$: $S'\to S''$。证明：若 $\sigma$ 和 $\tau$ 都是单(满)射，则 $\tau\sigma$ 也是单(满)射。

## §2 平面的正交变换

### 2.1 正交变换的定义和例

从§1及其习题6.1中，我们介绍了平面的三种点变换：平移，旋转，反射。它们在平面直角坐标系中的公式有一个共同的特点，即系数矩阵都是正交矩阵。本节我们就来研究具有这个特点的变换。

**定义6.7** 平面的一个点变换 $\sigma$，如果它在一个直角坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

其中系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵，则称 $\sigma$ 是平面的**正交(点)变换**。

这个定义与直角坐标系的选择无关，这是因为如果 $\sigma$ 在直角坐标系 I 中的公式为(6.5)，设直角坐标系 I 到 II 的过渡矩阵是 $T$，II 的原点的 I 坐标为 $(x_0, y_0)$，则 I 到 II 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

其中 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 表示点 $(x, y)$ 的 II 坐标。用(6.6)代入(6.5)中得

$$T \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A \left[ T \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

整理得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + T^{-1} \left[ A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} a_1 - x_0 \\ a_2 - y_0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

(6.7)就是 $\sigma$ 在坐标系 II 中的公式，其中系数矩阵是 $T^{-1}AT$，由于 $A$ 和 $T$ 都是正交矩阵，因此 $T^{-1}AT$ 仍是正交矩阵。这说明，若 $\sigma$ 在某一个直角坐标系中的公式的系数矩阵是正交矩阵，则它在任何一个直角坐标系中的公式的系数矩阵也是正交矩阵。

由定义6.7知，平移，旋转，反射都是正交变换。

### 2.2 正交变换的性质

**定理6.3** 正交变换保持点之间的距离不变。

**证明** 设$\sigma$是正交变换，它在一个直角坐标系中的公式是(6.5)。平面上任取两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_3)$，它们在$\sigma$下的象是$P_1'(x_1',y_1'),P_2'(x_2',y_2')$，则

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad i=1,2.$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_2'-x_1' \\ y_2'-y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= A\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}.$$

从而有

$$|P_1'P_2'|^2 = (x_2'-x_1')^2 + (y_2'-y_1')^2$$

$$= (x_2'-x_1', y_2'-y_1')\begin{pmatrix} x_2'-x_1' \\ y_2'-y_1' \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1, y_2-y_1)A'A\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1, y_2-y_1)E\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = |P_1P_2|^2.$$

所以
$$|P_1'P_2'| = |P_1P_2|.$$

定理6.3说明，点之间的距离是正交变换的不变量，它是正交变换的最简单而且最基本的不变量。

由正交矩阵的性质容易得到：正交变换的乘积还是正交变换；恒等变换是正交变换；正交变换是可逆的，并且它的逆变换仍是正交变换。

正交变换还有以下性质：

(1) 正交变换把直线变成直线。

**证明**　设 $\sigma$ 是正交变换，它的公式为(6.5)。令

$$\alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\quad \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \alpha_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

则(6.5)可写成

$$\alpha' = A\alpha + \alpha_0. \tag{6.5$'$}$$

平面上任取一条直线 $l$：$ax+by+c=0$，令 $\beta' = (a,b)$，则 $l$ 的方程可写成

$$\beta'\alpha + c = 0. \tag{6.8}$$

由(6.5)$'$得 $\alpha = A^{-1}(\alpha' - \alpha_0)$，代入(6.8)中，得

$$\beta' A^{-1}(\alpha' - \alpha_0) + c = 0,$$

即

$$\beta' A^{-1}\alpha' + c - \beta' A^{-1}\alpha_0 = 0. \tag{6.9}$$

假如 $\beta' A^{-1} = 0$，则得 $\beta' = 0$，即，$a=b=0$，矛盾。因此(6.9)是$x'$，$y'$的一次方程，从而(6.9)表示一条直线 $l'$。上述说明，直线 $l$ 上任一点在 $\sigma$ 下的象必在直线 $l'$ 上。反之，由于把公式(6.5)$'$代入方程(6.9)中就得到方程(6.8)，这说明直线 $l'$ 上的每一个点在 $\sigma$ 下的原象都在直线 $l$ 上。因此 $\sigma$ 把直线 $l$ 变成直线 $l'$。

(2) 正交变换把线段变成线段，并且保持线段的分比不变。

**证明**　设正交变换 $\sigma$ 把点 $P$，$Q$ 分别变成 $P'$，$Q'$。则线段$PQ$上任一点$M$的象$M'$在直线 $P'Q'$ 上，又由于 $\sigma$ 保持点之间的距离不变，因此

$$|P'M'| = |PM|,\quad |Q'M'| = |QM|,$$

从而 $M'$ 在线段 $P'Q'$ 上。反之，同理，线段 $P'Q'$ 上的任一点 $N'$ 的原象 $N$ 必在线段 $PQ$ 上。所以 $\sigma$ 把线段 $PQ$ 变成线段 $P'Q'$。

设点$M$是线段 $PQ$ 的内分点，使得

$$\frac{|PM|}{|MQ|} = \lambda,$$

则$M$在$\sigma$下的象$M'$在线段$P'Q'$上，从而$M'$是$P'Q'$的内分点，且

$$\frac{|P'M'|}{|M'Q'|}=\frac{|PM|}{|MQ|}=\lambda.$$

若点$N$是线段$PQ$的外分点，类似地可证得结论。

(3) 正交变换把平行直线变成平行直线。

**证明** 设$l_1 /\!/ l_2$。设正交变换$\sigma$把$l_i$变成直线$l'_i$，$i=1,2$。假如$l'_1$与$l'_2$交于$M'$，则$M'$的唯一的原象$M$既在$l_1$上，又在$l_2$上，这与$l_1 /\!/ l_2$矛盾。所以$l'_1 /\!/ l'_2$。

(4) 平面的一个正交点变换$\sigma$引起了平面的一个向量变换$\bar{\sigma}$(指平面上所有向量组成的集合$\bar{S}$的变换)。

**证明** 平面上取定一个直角坐标系，设$\sigma$是正交点变换，它的公式是(6.5)。考虑平面上任一向量$\boldsymbol{m}(u,v)$，取有向线段$\overrightarrow{PQ}$表示$\boldsymbol{m}$，其中$P,Q$的坐标分别是$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则$u=x_2-x_1,v=y_2-y_1$。设$\sigma$把$P,Q$分别变成$P'(x'_1,y'_1),Q'(x'_2,y'_2)$，则由(6.5)得

$$\begin{pmatrix}x'_i\\y'_i\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\qquad i=1,2.$$

于是得

$$\begin{pmatrix}x'_2-x'_1\\y'_2-y'_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

这说明，$\overrightarrow{P'Q'}$的坐标$(x'_2-x'_1,y'_2-y'_1)$只与$\sigma$和向量$\boldsymbol{m}$有关，而与$\boldsymbol{m}$的有向线段表示中起点的选择无关，因此可以规定集合$\bar{S}$里的一个对应法则$\bar{\sigma}$，它把$\boldsymbol{m}$对应到$\overrightarrow{P'Q'}$，即

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m})=\bar{\sigma}(\overrightarrow{PQ}):=\overrightarrow{P'Q'},$$

由于上述议论知$\bar{\sigma}$是$\bar{S}$的一个变换。

如果用$(u',v')$表示$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m})$的坐标，则由(6.10)得到

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \qquad (6.11)$$

(6.11)就是 $\bar{\sigma}$ 的公式，其中系数矩阵正好是原来正交点变换$\sigma$的公式(6.5)中的系数矩阵$A$。我们把公式中系数矩阵为正交矩阵的向量变换称为**正交向量变换**。于是由上述知，正交点变换$\sigma$引起一个正交向量变换$\bar{\sigma}$。今后在谈到正交(点)变换$\sigma$在向量上的作用时，指的就是$\sigma$引起的向量变换$\bar{\sigma}$在该向量上的作用。

(5) 正交变换还具有以下性质：

1) 保持向量的加法，即，$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2)=\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1)+\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_2)$；

2) 保持向量的数乘，即，$\bar{\sigma}(\lambda\boldsymbol{m})=\lambda\bar{\sigma}(\boldsymbol{m})$；

3) 保持向量的内积不变，即，$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1)\cdot\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_2)=\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2$；

4) 保持向量的长度不变，即，$|\bar{\sigma}(\boldsymbol{m})|=|\boldsymbol{m}|$；

5) 保持向量的夹角不变，即，$\langle\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1),\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_2)\rangle=\langle\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2\rangle$。

**证明** 设正交向量变换$\bar{\sigma}$在直角坐标系中的公式是(6.11)。设$\boldsymbol{m}_i$的坐标是$(u_i,v_i)$，$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_i)$的坐标是$(u_i',v_i')$，$i=1,2$；设$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2)$的坐标是$(u',v')$，则

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1'+u_2' \\ v_1'+v_2' \end{pmatrix},$$

因此 $\qquad \bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2)=\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1)+\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_2)$。

类似可证 $\bar{\sigma}(\lambda\boldsymbol{m})=\lambda\bar{\sigma}(\boldsymbol{m})$。

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_1)\cdot\bar{\sigma}(\boldsymbol{m}_2)=u_1'u_2'+v_1'v_2'=(u_1',v_1')\begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}$$

$$=(u_1,v_1)A^tA\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= (u_1, v_1) E \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 u_2 + v_1 v_2 = \boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2.$$

由于$\sigma$保持向量的内积不变，从而它保持向量的长度不变，也保持向量的夹角不变。

**定理6.4** 正交变换$\sigma$把任意一个直角标架Ⅰ变成一个直角标架(记作Ⅱ)，并且任一点$P$的Ⅰ坐标等于它的象$P'$的Ⅱ坐标。

**证明** 设$\sigma$把Ⅰ的原点$O$变成$O'$，把Ⅰ的基向量$\boldsymbol{e}_i$变成$\boldsymbol{e}'_i$，$i=1,2$。因为$\sigma$保持向量的长度且保持向量的夹角不变，所以$\boldsymbol{e}'_i$仍为单位向量，$\boldsymbol{e}'_1$与$\boldsymbol{e}'_2$仍垂直，从而Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]$也是一个直角标架。

设$P$的Ⅰ坐标是$(x,y)$，设$P$在$\sigma$下的象为$P'$，因为

$$\overrightarrow{O'P'} = \bar{\sigma}(\overrightarrow{OP}) = \bar{\sigma}(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)$$
$$= x\bar{\sigma}(\boldsymbol{e}_1) + y\bar{\sigma}(\boldsymbol{e}_2) = x\boldsymbol{e}'_1 + y\boldsymbol{e}'_2,$$

所以$P'$的Ⅱ坐标是$(x,y)$。

**推论6.1** 正交变换$\sigma$被它在一个直角标架上的作用所确定。

**证明** 因为只要知道了$\sigma$把一个直角标架Ⅰ变成直角标架Ⅱ，则平面上每一个点$P$在$\sigma$下的象$P'$也就确定了：$P'$的Ⅱ坐标等于$P$的Ⅰ坐标。

由推论6.1知，若两个正交变换$\sigma$和$\tau$在一个直角标架上的作用一样，则$\sigma$和$\tau$相等。

**定理6.5** 平面的正交变换或者是平移，或者是绕平面上一点的旋转，或者是对于平面上一条直线的反射，或者是它们之间的乘积。

**证明** 设$\sigma$是平面的一个正交变换，取一个直角标架Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，设$\sigma$把Ⅰ变成Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]$。

作由$\overrightarrow{OO'}$决定的平移$\tau_1$，它把Ⅰ变成$[O';\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$；再作绕点$O'$的旋转$\tau_2$，使$\boldsymbol{e}_1$转到$\boldsymbol{e}'_1$上，此时$\tau_2$把$[O';\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$变成$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}^*_2]$；

若 $e_2^* = e_2'$，则 $\tau_2\tau_1$ 把 I 变成 II，从而 $\tau_2\tau_1 = \sigma$；若 $e_2^* = -e_2'$，则再作对于直线 $l$（它经过点 $O'$，方向为 $e_1'$）的反射 $\tau_3$，此时 $\tau_3$ 把 $[O'; e_1', e_2^*]$ 变成 $[O'; e_1', e_2']$，因此 $\tau_3\tau_2\tau_1$ 把 I 变成 II，从而 $\sigma = \tau_3\tau_2\tau_1$。

平移，旋转以及它们的乘积称为**刚体运动**。

**定理6.6** 若正交变换 $\sigma$ 把直角标架 I $[O; e_1, e_2]$ 变成直角标架 II $[O'; e_1', e_2']$，则 $\sigma$ 在 I 中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

其中，系数矩阵 $A$ 正好是 I 到 II 的过渡矩阵，$(x_0, y_0)$ 是 II 的原点 $O'$ 的 I 坐标。

**证明** 设 $\sigma$ 把点 $P$ 变成 $P'$，设 $P$ 和 $P'$ 的 I 坐标分别是 $(x, y)$ 和 $(x', y')$。由定理 6.4 知，$P'$ 的 II 坐标等于 $P$ 的 I 坐标 $(x, y)$。设 I 到 II 的过渡矩阵为 $A$，设 II 的原点 $O'$ 的 I 坐标为 $(x_0, y_0)$，则对 $P'$ 点用坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x' \\ x' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

这个公式同时又表明了 $P$ 的 I 坐标 $(x, y)$ 与象 $P'$ 的 I 坐标 $(x', y')$ 之间的关系，因此这就是 $\sigma$ 在 I 中的公式。

## 习 题 6.2

1. 判断下述平面的点变换是否为正交变换？并且求它的不动点。

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + 1, \\[2ex] y' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - 2. \end{cases}$$

2. 在平面的点变换

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 \end{cases}$$

下，直线$x + y - 2 = 0$变成什么直线？

3．若把曲线$2xy = a^2$绕原点旋转45°，求新的曲线方程。

4．给了正交变换$\sigma$在直角坐标系Ⅰ中的公式为

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 3, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2. \end{cases}$$

若作直角坐标变换

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{y} - 2, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{y} - 1, \end{cases}$$

求$\sigma$在新坐标系中的公式。

5．平面的正交变换$\sigma$若有两个不动点$A$，$B$，则直线$AB$上每个点都是$\sigma$的不动点。

6．设$\tau_1$和$\tau_2$分别是平面对于直线$l_1$和$l_2$的反射，设$l_1$与$l_2$交于$O$点，且夹角为$\theta$，证明：$\tau_2\tau_1$是绕$O$点的旋转，转角为$2\theta$。

7．设平面的点变换$\sigma$的公式是

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b. \end{cases}$$

证明：当$\theta \neq 2k\pi$时，$\sigma$是绕一个定点的旋转。

8．求满足下列条件的正交变换的公式：绕原点旋转角度$\theta = -\frac{3}{4}\pi$，又要使点$M_0(0,1)$变成$M_0'(-2+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$。

9. 设正交变换$\sigma$把右手直角标架Ⅰ$[O;e_1,e_2]$变成Ⅱ$[O';e'_1,e'_2]$，设$e_1$到$e'_1$的转角为$\theta$，$O'$的Ⅰ坐标是$(x_0,y_0)$。证明：若Ⅱ为右手系，则$\sigma$的公式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + x_0, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + y_0; \end{cases}$$

若Ⅱ为左手系，则$\sigma$的公式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + x_0, \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + y_0. \end{cases}$$

10. 正交变换$\sigma$的公式中若系数矩阵$A$的行列式等于$+1$，则称$\sigma$是**第一类正交变换**；若$|A| = -1$，则称$\sigma$是**第二类正交变换**。证明：刚体运动是第一类正交变换；刚体运动和一个反射的乘积是第二类正交变换。

11. 判断下列变换是否为平面对于一直线的反射，若是反射，则求出反射轴。

$$(1)\quad \begin{cases} x' = x\cos2\theta + y\sin2\theta, \\ y' = x\sin2\theta - y\cos2\theta. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y). \end{cases}$$

## §3 平面的仿射变换

### 3.1 仿射变换的定义和例

**定义6.8** 平面的一个点变换$\tau$，如果它在一个仿射坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad (6.12)$$

其中系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 是非奇异的(即 $|A|\neq 0$)，则称 $\tau$ 是平面的**仿射(点)变换**。

这个定义与仿射坐标系的选择无关。其理由类似于正交变换的定义与直角坐标系的选择无关的理由。

由于直角坐标系也是一种仿射坐标系，且正交矩阵是非奇异的，因此正交变换都是仿射变换。但是仿射变换比正交变换更广泛，看下面的例子。

**例6.7** 平面向着直线 $l$ 的压缩(拉伸)。设 $l$ 的方向为 $\boldsymbol{e}_1$，在 $l$ 上取一点 $O$，建立仿射坐标系 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}]$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是事先给定的一个方向。

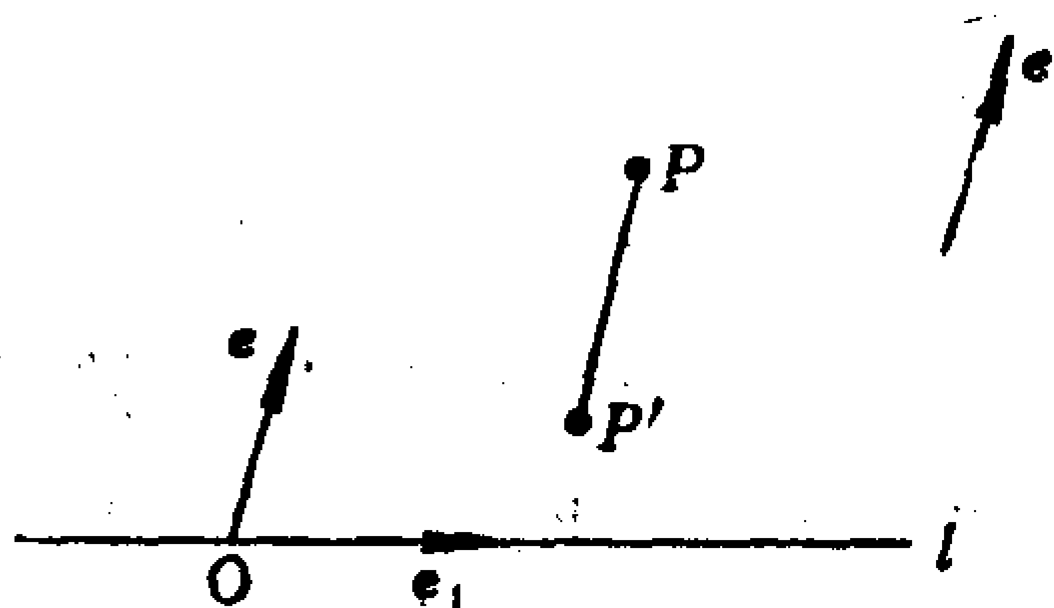



图 6.3

设 $(x,y)$ 是平面上任一点 $P$ 的坐标，规定平面的一个点变换 $\tau$，它把 $P$ 点对应到点 $P'(x',y')$，使得

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky, \end{cases} \tag{6.13}$$

其中 $k$ 是正的常数(与点 $P$ 无关)，则称 $\tau$ 是平面沿方向 $\boldsymbol{e}$ 向着直线 $l$ 的**压缩(拉伸)**，称 $k$ 是**压缩(拉伸)系数**，$0<k<1$ 时，是压缩；$k>1$ 时，是拉伸；$k=1$ 时，是恒等变换。若方向 $\boldsymbol{e}\perp l$，则称 $\tau$ 是正压缩(拉伸)，简称为压缩(拉伸)。若 $\boldsymbol{e}$ 与 $l$ 不垂直，则称 $\tau$ 是斜压缩(拉伸)。由于公式(6.13)中系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

是非奇异的，因此 $\tau$ 是仿射变换。但是当 $k\neq 1$ 时，显然它不是正交变换。

在习题 6.3 中还将介绍仿射变换的其他例子：同位相似，相似，错切等。

## 3.2 仿射变换的性质

由于非奇异矩阵一定是可逆矩阵，于是由可逆矩阵的性质容易得到：仿射变换的乘积仍是仿射变换；恒等变换是仿射变换；仿射变换是可逆的，并且它的逆变换也是仿射变换。

仿射变换还有以下性质：

（1）仿射变换把直线变成直线。

（2）仿射变换把平行直线变成平行直线。

这两条性质的证明与正交变换的相应性质的证明类似。

通常在仿射变换下，点之间的距离是会改变的，因此它不是一般仿射变换的不变量。

由于仿射变换把直线变成直线，因此它把共线的三点变成共线的三点。又由于仿射变换的逆变换仍是仿射变换，所以仿射变换把不共线的三点变成不共线的三点。

**定义6.9** 设$A,B,C$是共线的三点，在此直线上取定一个单位向量$\boldsymbol{e}$，若$\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$，则称$\lambda$是线段$AB$的**代数长**，就用$AB$表示线段$AB$的代数长。称$\frac{AB}{BC}$为共线三点$A,B,C$的**简单比值**，记作$(A,C,B)$，即

$$(A,C,B):=\frac{AB}{BC}.$$

**定理6.7** 仿射变换保持共线三点的简单比值不变。

**证明** 设$\tau$是仿射变换。任取平面上共线三点$A,B,C$，取它们所在的直线为$x$轴，建立一个直角坐标系。设$A,B,C$的横坐标分别为$x_1,x_2,x_3$。设$\tau$把$A,B,C$分别变成$A',B',C'$，则$A'$，$B'$，$C'$仍共线。

作一个正交变换$\sigma$，使得$A',B',C'$所在的直线$l'$变成$x$轴，其中$A',B',C'$分别变成$A'',B'',C''$。设$A'',B'',C''$的横坐标分别为$x_1'',x_2'',x_3''$。

设 $\sigma\tau$ 的公式为

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

因为 $\sigma\tau$ 把$A,B,C$分别变成$A'',B'',C''$，因此有

$$\begin{pmatrix} x_i'' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3.$$

于是得

$$x_i'' = b_{11}x_i + b_1, \quad i = 1,2,3.$$

从而

$$\frac{A''B''}{B''C''} = \frac{x_2'' - x_1''}{x_3'' - x_2''} = \frac{(b_{11}x_2 + b_1) - (b_{11}x_1 + b_1)}{(b_{11}x_3 + b_1) - (b_{11}x_2 + b_1)}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{AB}{BC}.$$

因为正交变换 $\sigma$ 保持线段的分比不变，所以

$$\frac{A''B''}{B''C''} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

由此得到

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC},$$

即

$$(A',C',B') = (A,C,B).$$

共线三点的简单比值是仿射变换的最简单且最基本的不变量。$(A,C,B)$实际上就是点$B$分线段$AC$的分比，从而有

**推论6.2** 仿射变换把线段变成线段，并且保持线段的分比不变。

与正交点变换引起平面的一个向量变换类似，仿射点变换 $\tau$ 也引起平面的一个向量变换 $\boldsymbol{\tau}$；并且如果 $\tau$ 的公式是(6.12)，则 $\boldsymbol{\tau}$ 的公式是

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

其中$(v,v)$是平面上任一向量$\boldsymbol{m}$的坐标，$(u',v')$是$\bar{\tau}(\boldsymbol{m})$的坐标，系数矩阵是非奇异的，这样的向量变换$\bar{\tau}$称为**仿射向量变换。**

今后我们在谈到仿射(点)变换$\tau$在向量上的作用时，指的就是$\tau$引起的向量变换$\bar{\tau}$在该向量上的作用。

与正交向量变换类似，仿射向量变换保持向量的加法和向量的数乘。

**定理6.8** 仿射变换$\tau$把任意一个仿射标架Ⅰ变成一个仿射标架(记作Ⅱ)，并且任一点$P$的Ⅰ坐标等于它的象$P'$的Ⅱ坐标。

**证明** 设Ⅰ的原点$O$在$\tau$下的象为$O'$，Ⅰ的基向量$\boldsymbol{e}_i$在$\bar{\tau}$下的象为$\boldsymbol{e}'_i$，$i=1,2$。设$\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OA_i}$，设$A_i$在$\tau$下的象为$A'_i$，则

$$\boldsymbol{e}'_i=\bar{\tau}(\boldsymbol{e}_i)=\bar{\tau}(\overrightarrow{OA_i})=\overrightarrow{O'A'_i}, \quad i=1,2.$$

因为$O,A_1,A_2$三点不共线，所以$O',A'_1,A'_2$三点也不共线，从而Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2]$也是一个仿射标架。

设$P$的Ⅰ坐标是$(x,y)$，即$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，两边用$\bar{\tau}$作用得，$\overrightarrow{O'P'}=x\boldsymbol{e}'_1+y\boldsymbol{e}'_2$，所以$P'$的Ⅱ坐标为$(x,y)$。

**定理6.9** 平面上任给两组不共线的三个点：$A_1,A_2,A_3$和$B_1,B_2,B_3$，则存在唯一的仿射变换把$A_i$变成$B_i$，$i=1,2,3$。

**证明** 因为$A_1,A_2,A_3$不共线，所以Ⅰ$[A_1;\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}]$是仿射标架。同理Ⅱ$[B_1;\overrightarrow{B_1B_2},\overrightarrow{B_1B_3}]$也是仿射标架。设Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵是$A$，设$B_1$的Ⅰ坐标是$(x_0,y_0)$。

在平面上建立一个对应法则$\tau$，它把任一点$P$对应到点$P'$，其中$P'$的Ⅱ坐标等于$P$的Ⅰ坐标$(x,y)$。设$P'$的Ⅰ坐标为$(x',y')$，对$P'$用仿射坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

这个公式同时也表明了$P$的Ⅰ坐标与它的象$P'$的Ⅰ坐标之间的关系，因此这就是$\tau$在Ⅰ中的公式，由于系数矩阵$A$非奇异，所以$\tau$是仿射变换。由于$A_i$的Ⅰ坐标与$B_i$的Ⅱ坐标相同，所以

$$\tau(A_i)=B_i,\quad i=1,2,3.$$

关于唯一性。假如还有一个仿射变换$\sigma$把$A_i$变成$B_i$，$i=1,2,3$。则$\sigma$把仿射标架Ⅰ变成仿射标架Ⅱ，从而任一点$P$的Ⅰ坐标等于$\sigma(P)$的Ⅱ坐标，于是$\sigma(P)=\tau(P)$，所以$\sigma=\tau$。

**推论6.3** 平面上任给两个仿射标架Ⅰ和Ⅱ，则存在唯一的仿射变换把标架Ⅰ变成标架Ⅱ。

### 3.3 仿射变换的变积系数

正交变换保持点之间的距离不变，保持向量之间的夹角不变，从而保持图形的面积不变。而一般的仿射变换会改变点之间的距离，也会改变向量之间的夹角，也会改变图形的面积。本小节来讨论仿射变换改变图形面积的规律。

设在平面上规定了一个定向，它用单位法向量$\boldsymbol{e}$代表。用$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边并且边界的环行方向为$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$的旋转方向的定向平行四边形的定向面积，由(1.26)得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}.$$

**定理6.10** 设仿射变换$\tau$在仿射标架Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$中的公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},$$

对于任意不共线的向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，设$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}'$，则有

$$\frac{(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}.\tag{6.16}$$

**证明** 由于$\tau$是仿射变换，因此它把仿射标架Ⅰ变成仿射标架Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$。由$\boldsymbol{\tau}$在Ⅰ中的公式(6.15)可算出$\boldsymbol{e}_1'$的Ⅰ坐标是$(a_{11},a_{21})$，$\boldsymbol{e}_2'$的Ⅰ坐标是$(a_{12},a_{22})$。

设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的Ⅰ坐标分别为$(u_1, v_1)$，$(u_2, v_2)$，则$\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$的Ⅱ坐标分别为$(u_1, v_1)$，$(u_2, v_2)$。在坐标系Ⅰ中计算得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (u_1\boldsymbol{e}_1 + v_1\boldsymbol{e}_2) \times (u_2\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2).\end{aligned}$$

因为$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}$，所以

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2). \tag{6.17}$$

公式(6.17)对于平面上任意向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$均成立，特别地对于$\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$也成立，因此有

$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2).$$

同样的道理，在Ⅱ中计算得

$$(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2').$$

因此

$$\frac{(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = \frac{(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

易知如果仿射变换$\tau$在仿射坐标系Ⅰ中的公式的系数矩阵为$A$，那末$\tau$在仿射坐标系Ⅱ中的公式的系数矩阵为$H^{-1}AH$，其中$H$是Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵。因为

$$\begin{aligned}|H^{-1}AH| &= |H^{-1}||A||H| = |H|^{-1}|A||H| \\ &= |A|,\end{aligned}$$

所以仿射变换$\tau$的公式中的系数矩阵的行列式与仿射标架的选择无关。

**定义6.10** 仿射变换$\tau$的公式中的系数矩阵的行列式称为$\tau$的行列式，记作$d_\tau$。如果$d_\tau > 0$，则称$\tau$是**第一类的**；如果$d_\tau$

$<0$，则称 $\tau$ 是**第二类的**。

定理6.10表明，仿射变换 $\tau$ 按照同一个比值 $d_\tau$ 来改变所有平行四边形的定向面积，不仅如此，还有

**推论6.4** 若平面上任一有面积的区域 $D$ 经过仿射变换 $\tau$ 变成区域 $D'$，则有

$$\frac{S_{D'}}{S_D}=|d_\tau|, \tag{6.18}$$

其中 $S_{D'}$，$S_D$ 分别表示 $D'$，$D$ 的面积。

**证明** 用两组平行线分割区域 $D$，由于仿射变换把平行线变成平行线，因此相应地有两组平行线分割 $D'$。用 $S_1(S'_1)$ 表示在 $D(D')$ 内的所有平行四边形面积的总和；用 $S_2(S'_2)$ 表示至少与 $D(D')$ 有一个公共点的平行四边形的面积的总和，则有

$$S'_1\leqslant S_{D'}\leqslant S'_2, \tag{6.19}$$

由于 $S'_1=S_1|d_\tau|$，$S'_2=S_2|d_\tau|$，代入(6.19)得

$$S_1|d_\tau|\leqslant S_{D'}\leqslant S_2|d_\tau|, \tag{6.20}$$

由于用两组平行线无限细分区域 $D$ 时，有

$$\lim S_1=S_D,\quad \lim S_2=S_D,$$

所以在(6.20)取极限得

$$S_D|d_\tau|\leqslant S_{D'}\leqslant S_D|d_\tau|,$$

即得
$$S'_D=S_D|d_\tau|.$$

推论6.4说明，仿射变换 $\tau$ 按同一个比值 $|d_\tau|$ 改变平面上所有(有面积的)图形的面积，因此把 $|d_\tau|$ 称为仿射变换 $\tau$ 的**变积系数**。

## 习 题 6.3

1．求下述仿射变换的不动点。

$$\begin{cases}x'=4x-y-5,\\ y'=2x+3y+2.\end{cases}$$

2. 设在平面上一个仿射坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$里，给了点$A(-1,0)$，$B(0,-1)$，$C(-3,1)$和$A'(2,1)$，$B'(-1,3)$，$C'(-2,4)$。

(1) 求把点$O$，$E_1(1,0)$，$E_2(0,1)$分别变成$A$，$B$，$C$的仿射变换公式；

(2) 求把点$O$，$E_1$，$E_2$分别变成$A'$，$B'$，$C'$的仿射变换公式；

(3) 求把点$A$，$B$，$C$分别变成$A'$，$B'$，$C'$的仿射变换公式。

3. 求把三条直线：$x=0$，$x-y=0$，$y=1$依次变成$3x-2y-3=0$，$x-1=0$，$4x-y-9=0$的仿射变换的公式。

4. 证明：仿射变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - \dfrac{a}{b}y\sin\theta, \\ y' = \dfrac{b}{a}x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

把椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$变成它自身，但是当$\theta\neq 2k\pi$时，此椭圆上没有不动点。

5. 给了仿射变换$\tau$：

$$\begin{cases} x' = -2x+3y-1, \\ y' = 4x-y+3; \end{cases}$$

如果作仿射坐标变换：

$$\begin{cases} x = 2\tilde{x}-\tilde{y}+4, \\ y = 3\tilde{x}+2\tilde{y}+5, \end{cases}$$

求$\tau$在新坐标系中的公式。

6. 如果一条直线与它在仿射变换$\tau$下的象重合，则称这条直线为$\tau$的**不变直线**。求下述仿射变换的不变直线。

$$\begin{cases} x' = 7x-y+1, \\ y' = 4x+2y+4. \end{cases}$$

7. 设仿射变换$\tau$在仿射坐标系Ⅰ中的公式为

$$\begin{cases}x' = x + 2y,\\ y' = 4x + 3y.\end{cases}$$

（1） 求 $\tau$ 的不变直线；

（2） 以 $\tau$ 的两条不变直线为新坐标轴，求 $\tau$ 在新的仿射坐标系中的公式。

8． 证明：如果一个仿射变换有两个不动点 $M_1$ 和 $M_2$，则直线 $M_1M_2$ 上的每个点在这仿射变换下不变。

9． 设 $O$ 是平面上一个定点，平面上一个点变换 $\tau$ 如果把 $O$ 保持不变，并且使平面上任一点 $M$ 变成 $M'$，它们满足

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM},$$

其中 $k$ 为正的常数，则称 $\tau$ 是**同位相似（或位似）**，称 $O$ 为**位似中心**，称 $k$ 为**位似系数**。

（1） 适当选取坐标系，求出位似 $\tau$ 的公式；

（2） 证明位似是仿射变换；

（3） 证明位似保持角度不变；

（4） 证明位似可以分解成某两个压缩的乘积。

10．将仿射变换

$$\begin{cases}x' = 4x,\\ y' = 2y\end{cases}$$

分解成一个压缩和一个位似的乘积。

11．平面的一个点变换 $\tau$，如果使得对应线段的长度之比为一个正常数 $k$，则称 $\tau$ 为**相似**，称 $k$ 为**相似系数**。

（1） 证明相似保持角度不变；

（2） 证明相似是仿射变换；

（3） 写出相似在一个直角坐标系中的公式；

（4） 证明相似可以分解成一个正交变换与一个位似的乘积；

（5） 证明相似保持任意两条线段的比值不变。

12．设平面的一个仿射变换 $\tau$ 使直线 $l$ 上的每一点都不变，

设 $\tau$ 把 $A,B$ 分别变到 $A',B'$，证明：

(1) 直线 $AB$ 与 $A'B'$ 或者同时平行于 $l$，或者相交于 $l$ 上一点；

(2) 直线 $AA'$ 与 $BB'$ 彼此平行。

13．对于第12题中的 $\tau$，假如有一个点$M$和它的象点 $M'$ 的连线 $MM' \parallel l$，这时称 $\tau$ 为**错切**，称 $l$ 为**错切轴**。证明：在适当选取的仿射坐标系里，错切的公式是

$$\begin{cases} x' = x + ay, \\ y' = y, \end{cases}$$

并且证明错切不改变图形的面积。

14．证明：不是错切的保持一直线 $l$ 上每个点都不变的仿射变换是一个斜压缩，或者是一个斜压缩与一个反射的乘积。

15．求保留两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$不变的平面仿射变换公式。

16．设在平面上给了两个三角形 $ABC$ 和$DEF$，问有几个仿射变换把$\triangle ABC$ 变成$\triangle DEF$？

17．证明：平面上任给两个直角标架Ⅰ和Ⅱ，都存在唯一的正交变换把Ⅰ变成Ⅱ。

18．设$\triangle ABC$ 的 $AB,BC$ 边长分别为10cm，6cm，$\angle ABC = 30°$，设仿射变换 $\tau$：

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1, \\ y' = x - 4y + 2 \end{cases}$$

把 $A,B,C$ 分别变成 $A',B',C'$，求$\triangle A'B'C'$的面积。

## §4　图形的度量性质和仿射性质

本章开头曾指出，研究图形性质可以采用点变换法，即，作一个点变换，把一个图形$C$变成另一个较简单的图形$C'$。所谓一个点变换$\sigma$把图形$C$变成$C'$，是指$\sigma$引起了$C$（作为点的集合）

到 $C'$（点的集合）的一个双射。如果 $\sigma$ 把图形 $C$ 变成 $C'$，则 $C$ 和 $C'$ 就共同具有在 $\sigma$ 下不变的那些性质。为此本节来讨论在正交变换下不变的几何性质和在仿射变换下不变的几何性质。

### 4.1 度量性质和仿射性质

**定义6.11** 在任意正交变换下不变的几何性质（或几何量、几何概念）称为**度量性质**（或**正交不变量**、**度量概念**）；在任意仿射变换下不变的几何性质（或几何量、几何概念）称为**仿射性质**（或**仿射不变量**、**仿射概念**）。

因为正交变换都是仿射变换，所以在仿射变换下不变的性质在正交变换下当然也不变，这说明仿射性质（仿射概念、仿射不变量）都是度量性质（度量概念、正交不变量）。但是反之，度量性质不一定是仿射性质。下面列举出不是仿射性质的度量性质。

度量性质有：① 垂直；② 轴对称。

正交不变量有：① 点之间的距离；② 向量的长度；③ 两向量的夹角；④ 图形的面积；⑤二次曲线 $S$ 的 $I_1,I_2,I_3$（因为 $I_1,I_2,I_3$ 在直角坐标变换下不变，而正交点变换公式与直角坐标变换公式在形式上一样，所以 $I_1,I_2,I_3$ 在正交点变换下不变）。

度量概念有：① 距离（长度）；② 角度；③ 面积；④ 对称轴。

现在来看哪些性质是仿射性质。

仿射性质有：① 共线；② 平行；③ 相交；④ 共线点的顺序；⑤ 中心对称。

关于中心对称是仿射性质的理由：设仿射变换 $\tau$ 把图形 $C$ 变成 $C'$，设 $C$ 是中心对称图形，其对称中心为 $O$，设 $O$ 在 $\tau$ 下的象是 $O'$。在 $C'$ 上任取一点 $P'$，它的原象 $P$ 在 $C$ 上。因为 $C$ 中心对称，所以 $P$ 关于 $O$ 点的对称点 $Q$ 在 $C$ 上。设 $Q\overset{\tau}{\mapsto}Q'$，则 $Q'$ 在 $C'$ 上。因为 $O$ 是线段 $PQ$ 的中点，所以 $O'$ 是线段 $P'Q'$ 的中点，

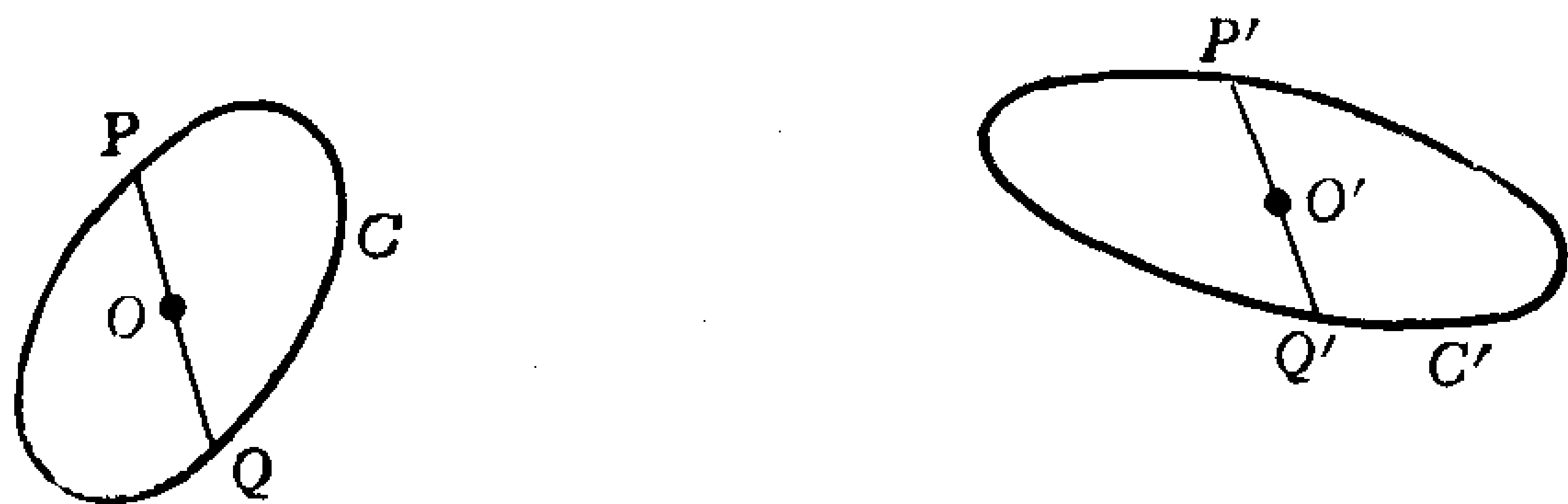



图 6.4

从而 $Q'$ 是 $P'$ 关于 $O'$ 的对称点。这就证明了：$C'$ 上任一点 $P'$ 关于 $O'$ 点的对称点 $Q'$ 仍在 $C'$ 上，因此 $C'$ 是中心对称图形，其对称中心为 $O'$。

仿射不变量有：① 共线三点的简单比值；② 代数曲线的次数。

仿射概念有：① 直线；② 线段，线段的中点；③ 对称中心；④ 代数曲线；⑤ 二次曲线的渐近方向、非渐近方向；⑥ 二次曲线的直径；⑦ 中心型二次曲线的共轭直径；⑧ 二次曲线的切线。

*关于二次曲线的渐近方向、直径、共轭直径和切线是仿射概念的理由：平面上取定一个仿射坐标系，设二次曲线 $S$ 的方程的二次项部分为

$$\varphi(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad (6.21)$$

其中 $\varphi(x,y)$ 的矩阵简记作 $A$。

设仿射变换 $\tau$ 的公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}, \qquad (6.22)$$

则 $\tilde{\tau}$ 的公式为

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}, \qquad (6.23)$$

设 $\tau$ 把二次曲线 $S$ 变成 $S'$，从(6.22)反解出$(x,y)$，再代入到(6.21)中可求得 $S'$ 的方程的二次项部分为

$$\varphi'(x',y')=(x',y')(B^{-1})^t AB^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},$$

对于任一向量 $\boldsymbol{v}(u,v)$，设 $\tau$ 把 $\boldsymbol{v}$ 变成 $\boldsymbol{v}'(u',v')$，则有

$$\varphi'(u',v')=(u',v')(B^{-1})^t AB^{-1}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}=\left[B^{-1}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right]^t A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

$$=(u,v)A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\varphi(u,v)。\tag{6.24}$$

(6.24)说明，若 $\boldsymbol{v}(u,v)$是 $S$ 的渐近方向(非渐近方向)，则 $\boldsymbol{v}'(u',v')$是 $S'$ 的渐近方向(非渐近方向)。

因为在仿射变换 $\tau$ 下，二次曲线 $S$ 的弦变成 $S'$ 的弦，$S$ 的平行弦变成 $S'$ 的平行弦，$S$ 的弦的中点变成 $S'$ 的相应弦的中点，所以如果 $l$ 是 $S$ 的直径，则 $l$ 在 $\tau$ 下的象 $l'$ 是 $S'$ 的直径。

设 $l_1,l_2$ 是 $S$ 的一对共轭直径(此时假设 $S$ 是中心型曲线)，设 $l_i$ 的方向为 $\boldsymbol{v}_i(u_i,v_i)$。由于 $l_2$ 共轭于 $l_1$ 的方向$(u_1,v_1)$，所以 $l_2$ 的方程据(5.58)为：

$$(a_{11}u_1+a_{12}v_1)x+(a_{12}u_1+a_{22}v_1)y+a_1u_1+a_2v_1=0,$$

因此
$$u_2:v_2=-(a_{12}u_1+a_{22}v_1):(a_{11}u_1+a_{12}v_1),$$

即
$$a_{11}u_1u_2+a_{12}(u_1v_2+u_2v_1)+a_{22}v_1v_2=0。$$

设 $\tau$ 把 $l_i$ 变成 $l'_i$，把 $\boldsymbol{v}_i$变成 $\boldsymbol{v}'_i(u'_i,v'_i)$，$i=1,2$。则有

$$\begin{aligned}0&=a_{11}u_1u_2+a_{12}(u_1v_2+u_2v_1)+a_{22}v_1v_2\\&=(u_1,v_1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}=(u'_1,v'_1)(B^{-1})^t AB^{-1}\begin{pmatrix}u'_2\\v'_2\end{pmatrix}\\&=a'_{12}u'_1u'_2+a'_{12}(u'_1v'_2+v'_2v'_1)+a'_{22}v'_1v'_2,\end{aligned}\tag{6.25}$$

其中

$$(B^{-1})^t AB^{-1}=\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}\\a'_{12}&a'_{22}\end{pmatrix},$$

因为$(B^{-1})^t AB^{-1}$ 是 $S'$ 的方程的二次项部分 $\varphi'(x',y')$的矩阵，所以 $a'_{11},a'_{12},a'_{22}$ 是 $S'$ 的方程的二次项系数。由(6.25)知，$l'_1$ 与 $l'_2$ 是 $S'$ 的一对共轭直径。

因为渐近方向、非渐近方向是仿射概念，且相交是仿射性质，所以二次曲线的切线是仿射概念。

## 4.2 变换群与几何学

度量性质是在所有正交变换下不变的性质，因此需要来讨论平面的所有正交变换组成的集合$H$，从正交变换的性质知道，$H$有下述性质：

(1) 对于任意$\sigma,\tau\in H$，有$\sigma\tau\in H$；

(2) 恒等变换$\varepsilon$在$H$里；

(3) 任$\sigma\in H$，则$\sigma$可逆，且$\sigma^{-1}\in H$。

类似地，平面上所有仿射变换组成的集合也有这三条性质。

**定义6.12** 集合$S$到自身的一些双射组成的集合$G$，如果满足：

(1) 对于任意$\sigma,\tau\in G$，都有$\sigma\tau\in G$；

(2) $\varepsilon_S\in G$；

(3) 任意$\sigma\in G$，有$\sigma^{-1}\in G$；

则称$G$是集合$S$的一个**变换群**。

于是，平面的所有正交变换组成的集合$H$是平面的一个变换群，称$H$为平面的**正交变换群**；平面的所有仿射变换组成的集合$H_0$也是平面的一个变换群，称$H_0$为平面的**仿射变换群**。

集合$S$到自身的所有双射组成的集合显然是$S$的变换群，称它为$S$的**全变换群**。

德国数学家克莱因(F.Klein)在1872年运用变换群的思想来区分各种几何学，他提出，每一种几何都是研究图形在一定的变换群下不变的性质。这就是著名的**爱尔朗根纲领**(Erlangen Program)。于是，研究图形在正交变换群下不变的性质(即，度量性质)的几何学称为**欧几里得几何学**；研究图形在仿射变换群下不变的性质(即仿射性质)的几何学称为**仿射几何学**。

## 4.3 图形的正交等价和仿射等价

利用所给的变换群可以把平面上所有图形进行分类.

**定义6.13** 平面上的图形 $C_1$ 和 $C_2$ 称为**正交等价**，如果存在一个正交变换 $\sigma$ 把 $C_1$ 变成 $C_2$，记作 $C_1 \sim C_2$.

正交等价是平面上图形之间的一种关系，它具有：

(1) 反身性，即任一图形 $C \sim C$，(因为 $\varepsilon$ 把 $C \mapsto C$)；

(2) 对称性，即若 $C_1 \sim C_2$，则 $C_2 \sim C_1$，这是因为如果正交变换 $\tau$ 把 $C_1$ 变成 $C_2$，则正交变换 $\tau^{-1}$ 把 $C_2$ 变成 $C_1$；

(3) 传递性，即若 $C_1 \sim C_2$，$C_2 \sim C_3$，则 $C_1 \sim C_3$，这是因为如果正交变换 $\tau_1$ 把 $C_1$ 变成 $C_2$，正交变换 $\tau_2$ 把 $C_2$ 变成 $C_3$，则正交变换 $\tau_2\tau_1$ 把 $C_1$ 变成 $C_3$.

对于平面上每个图形 $C$，所有与 $C$ 正交等价的图形组成的集合记作 $[C]$，称 $[C]$ 是平面上图形的一个**正交等价类**.这样，平面上的所有图形被分成了若干个正交等价类，它们具有以下性质：

(1) 若 $C \sim D$，则 $[C] = [D]$；

(2) 平面上每个图形属于且只属于一个正交等价类；

(3) 同一正交等价类里的任意两个图形必正交等价；

(4) 不同正交等价类里的两个图形不正交等价.

**证明** (1) 任 $C_1 \in [C]$，即，$C_1 \sim C$，又 $C \sim D$，所以 $C_1 \sim D$，于是 $C_1 \in [D]$，即，$[C] \subset [D]$；同理，$[D] \subset [C]$，所以 $[C] = [D]$.

(2) 平面上任取一个图形 $C_1$，因为 $C_1 \sim C_1$，所以 $C_1 \in [C_1]$.假如 $C_1 \in [C_2]$，则 $C_1 \sim C_2$，由(1)知，$[C_1] = [C_2]$.

(3) 若 $C_1, C_2 \in [C]$，则 $C_1 \sim C$，$C_2 \sim C$，从而 $C_1 \sim C_2$.

(4) 设 $[C] \neq [D]$，设 $C_1 \in [C]$，$D_1 \in [D]$，假如 $C_1 \sim D_1$，则由 $C_1 \sim C$，$D_1 \sim D$，$C_1 \sim D_1$ 可推出 $C \sim D$，于是 $[C] = [D]$，与已知矛盾，所以 $C_1 \nsim D_1$.

既然同一个正交等价类里的任意两个图形都是正交等价的，

因此同一个正交等价类里的图形的共同性质就是在任意正交变换下不变的性质，即，度量性质。这样我们在研究图形 $C$ 的度量性质时，就可以在 $[C]$ 里挑一个最简单的图形来研究，这就是研究图形的正交分类的目的。

同样地，平面的仿射变换群把平面上所有图形分成了一些**仿射等价类**(简称**仿射类**)。同一个仿射类里的任意两个图形是仿射等价的；不同仿射类里的两个图形是不仿射等价的。因此，同一个仿射类里图形的共同性质就是仿射性质。我们在研究图形 $C$ 的仿射性质时，就可以在 $C$ 所属的仿射类里挑一个最简单的图形来研究。

**例6.8** 证明平面上所有平行四边形恰好组成一个仿射类。

**证明** 取一个平行四边形 $ABCD$，任取一个平行四边形 $EFGH$，因为 $A,B,D$ 不共线，$E,F,H$ 也不共线，所以存在唯一的仿射变换 $\tau$ 把 $A,B,D$ 分别变成 $E,F,H$，从而 $\tau$ 把仿射标架 I $[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]$ 变成 II $[E;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}]$。因为 $C$ 点的 I 坐标是 $(1,1)$，所以 $\tau(C)$ 的 II 坐标为 $(1,1)$。由于 $G$ 点的 II 坐标为 $(1,1)$，因此 $\tau(C)=G$。于是 $\tau$ 把平行四边形 $ABCD$ 变成平行四边形 $EFGH$，即 $\square EFGH\in[\square ABCD]$。由于任一仿射变换把平行四边形变成平行四边形，因此在 $[\square ABCD]$ 里只有平行四边形。

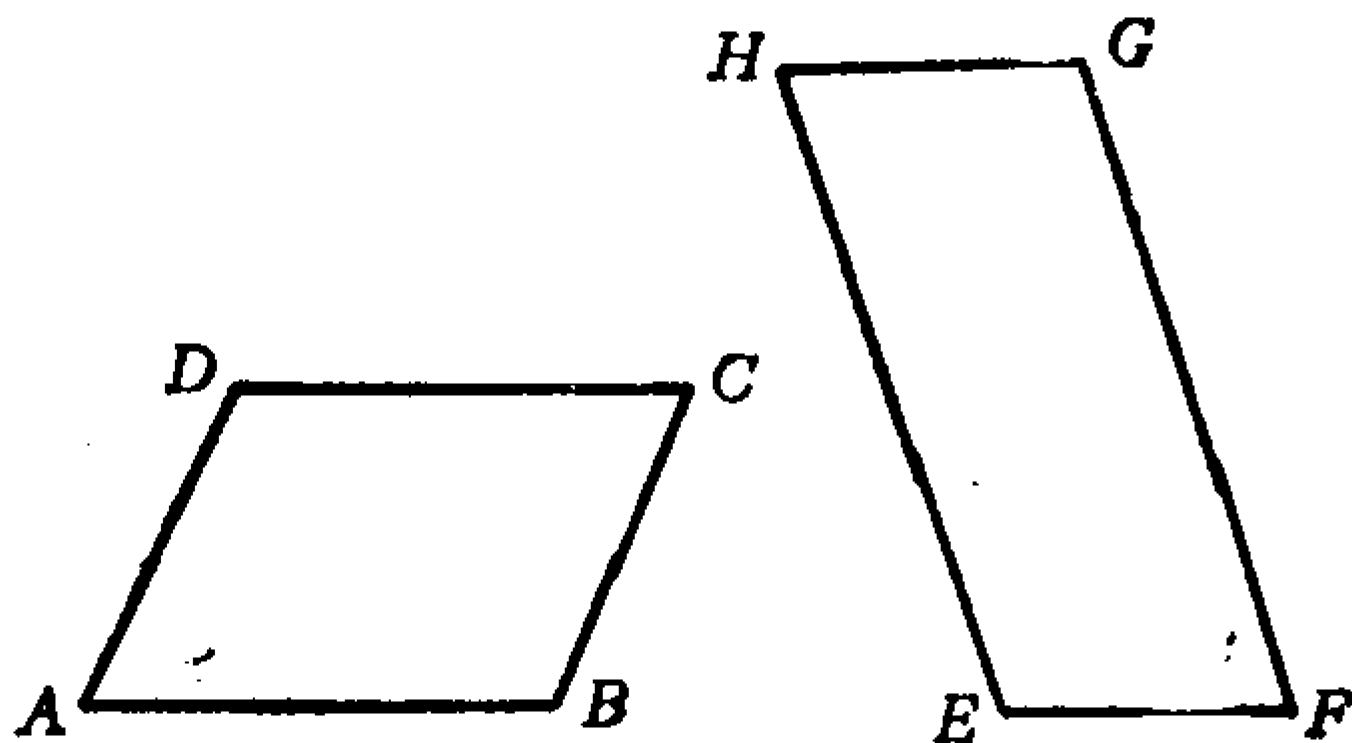


图 6.5

## 习 题 6.4

1. 证明：三角形的中线、重心都是仿射概念。
2. 证明：三角形的角平分线是度量概念。

3. 证明："一点是三角形内部的点"是仿射性质。

4. 证明：平面绕一个固定点转90°,180°,270°的三个旋转 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 和恒等变换 $\varepsilon$ 组成一个变换群。

5. 当 $a,b$ 取任意不全为零的实数时，问所有下列仿射变换组成的集合是否成为一个变换群。

$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay. \end{cases}$$

6. 证明：平面上所有保持面积不变的仿射变换构成一个变换群。

7. 证明：两个三角形正交等价的充分必要条件是它们全等。

8. 证明：两对相交直线正交等价的充分必要条件是它们的夹角相等。

9. 证明：任意两对相交直线必然仿射等价。

10. 证明：平面上所有三角形恰好组成一个仿射类。

11. 证明：平面上的梯形有无穷多个仿射类，从而说明平面上的四边形有无穷多个仿射类。

## §5 二次曲线的正交分类和仿射分类

平面上的二次曲线能分成多少个正交等价类？多少个仿射类？

在第五章§1里我们已经知道平面上的二次曲线有九种，它们是：椭圆，虚椭圆，一个点，双曲线，一对相交直线，抛物线，一对平行直线，一对虚平行直线，一对重合直线。

现在取定一个直角坐标系$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$。

任取一个椭圆，它总可以经过正交变换(平移和旋转的乘积)变成中心在原点、对称轴为坐标轴的椭圆：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6.26}$$

再作仿射变换

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{a}x, \\ y' = \frac{1}{b}y \end{cases}$$

可把椭圆(6.26)变成圆心在原点的单位圆：$x^2+y^2=1$。因此，任一椭圆与圆心在原点的单位圆(记作 $C_1$)仿射等价。

类似地，任一虚椭圆与虚单位圆 $x^2+y^2=-1$(记作 $C_2$)仿射等价；任一点与原点 $x^2+y^2=0$(记作 $C_3$)仿射等价；任一双曲线与中心在原点的等轴双曲线 $x^2-y^2=1$(记作 $C_4$)仿射等价；任意一对相交直线与交点在原点的相交直线 $x^2-y^2=0$(记作 $C_5$)仿射等价。

任取一条抛物线可以经过正交变换(平移和旋转的乘积)变成顶点在原点、对称轴为 $x$ 轴的抛物线 $y^2=2px$，再作仿射变换

$$\begin{cases} x' = 2px, \\ y' = y \end{cases}$$

可以变成抛物线 $y^2=x$，因此任一抛物线与 $y^2=x$(记作 $C_6$)仿射等价。

任意一对平行直线总可以经过正交变换(平移和施转的乘积)变成平行直线 $y^2=a^2$，再作仿射变换

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \frac{1}{a}y \end{cases}$$

可以变成平行直线 $y^2=1$，因此任意一对平行直线与 $y^2=1$(记作 $C_7$)仿射等价。类似地，任意一对虚平行直线与 $y^2=-1$(记作 $C_8$)仿射等价；任意一对重合直线与 $x$ 轴，即，$y^2=0$(记作 $C_9$)仿射等价。

综上述，二次曲线至多有九个仿射类，它们是

$$[C_i],\ i=1,2,\cdots,9.$$

$C_3$是一个点，由于仿射变换把一个点变成一个点，因此$[C_3] \neq [C_i]$，$i \neq 3$。

$C_9$是一对重合直线，由于仿射变换把直线变成直线，因此$[C_9] \neq [C_i]$，$i \neq 9$。

$C_7$是一对平行直线，由于仿射变换把平行直线变成平行直线，因此$[C_7] \neq [C_i]$，$i \neq 7$。

由于仿射变换把相交直线变成相交直线，因此$[C_5] \neq [C_i]$，$i \neq 5$。

$C_6$是抛物线，它不是中心对称图形，而$C_1, C_4$均是中心对称图形，所以$[C_6] \neq [C_1], [C_4]$。又显然$[C_6] \neq [C_2], [C_8]$。

$C_1$是圆，$C_4$是双曲线，因为圆沒有渐近方向，双曲线有渐近方向，所以$[C_1] \neq [C_4]$。又显然$[C_1] \neq [C_2], [C_8]$；$[C_4] \neq [C_2], [C_8]$。

$C_2$是椭圆型曲线，无渐近方向；而$C_8$是抛物型曲线，有渐近方向，所以$[C_2] \neq [C_8]$。

上述表明，平面上的二次曲线恰好分成了九个不同的仿射类。

从上面的讨论还可看出，平面上所有二次曲线分成无穷多个正交等价类，在每一类里取一个代表，则所有这些代表是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \quad y^2=2px, \quad y^2=a^2, \quad y^2=-a^2, \quad y^2=0,$$

其中$a, b, p$可以取任意正实数。

作为二次曲线的仿射分类的应用，我们来证明

**定理6.11** 平面的任一仿射变换$\tau$可分解成一个正交变换与两个沿互相垂直的方向的压缩(拉伸)的乘积。

**证明** 考虑圆心在点$O$的单位圆$C$，设仿射变换$\tau$把$C$变成

中心为$O'$的椭圆$C'$。在$C'$上取长轴$l'_1$和短轴$l'_2$，它们是$C'$的

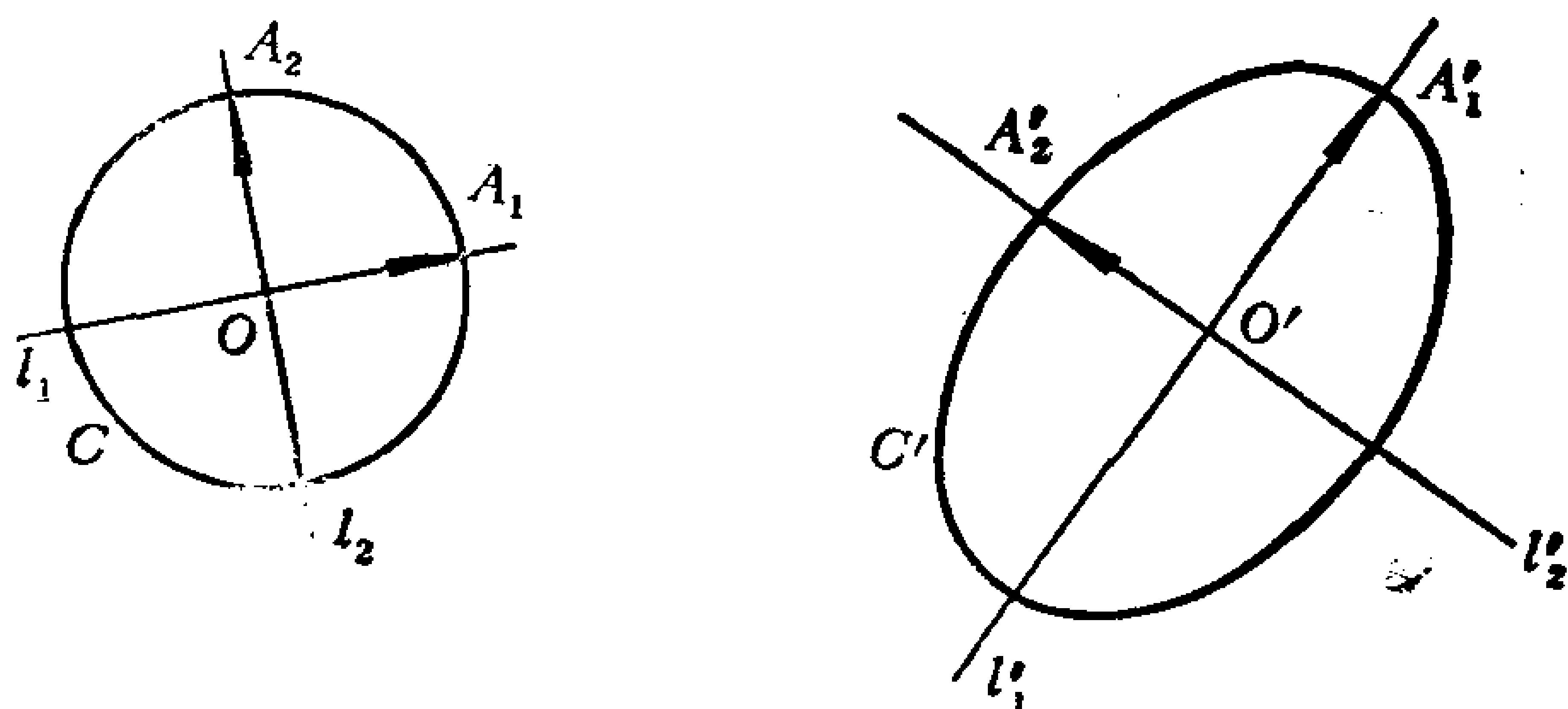



图 6.6

一对共轭直径，于是它们的原象$l_1,l_2$应为圆$C$的共轭直径，从而$l_1$与$l_2$垂直。设$l_i$与$C$交于$A_i$，由于$C$是单位圆，所以$|\overrightarrow{OA_i}|=1$，$i=1,2$。于是Ⅰ$[O;\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}]$是直角标架。设$A_i$在$\tau$下的象是$A'_i$，则$A'_i$是$l'_i$与$C'$的交点，因此$\overrightarrow{O'A'_1}\perp\overrightarrow{O'A'_2}$。$\tau$把Ⅰ变成Ⅱ$[O';\overrightarrow{O'A'_1},\overrightarrow{O'A'_2}]$。令$e'_1=\frac{1}{a}\overrightarrow{O'A'_1}$，$e'_2=\frac{1}{b}\overrightarrow{O'A'_2}$，其中$a,b$分别是$C'$的长、短半轴，于是Ⅲ$[O';e'_1,e'_2]$为直角标架，因此存在正交变换$\sigma$把Ⅰ变成Ⅲ。作沿方向$e'_1$向着直线$l'_2$的压缩（拉伸）$\tau_1$，其压缩系数为$a$，则$\tau_1(e'_1)=ae'_1=\overrightarrow{O'A'_1}$，$\tau_1(e'_2)=e'_2$，于是$\tau_1$把Ⅲ变成$[O';\overrightarrow{O'A'_1},e'_2]$。再作沿方向$e'_2$向着直线$l'_1$的压缩（拉伸）$\tau_2$，压缩系数为$b$，则$\tau_2$把$[O';\overrightarrow{O'A'_1},e'_2]$变成Ⅱ。因此，$\tau_2\tau_1\sigma$把Ⅰ变成Ⅱ，从而$\tau=\tau_2\tau_1\sigma$。

利用二次曲线的仿射分类，可以解决本章开始时提出的问题。

**例6.9** 证明：椭圆的任意一对共轭直径把椭圆分成四块面积相等的部分。

**证明** 任给一个椭圆$C$，任取它的一对共轭直径$l_1$和$l_2$。因为椭圆和圆心在原点的单位圆$C_1$在同一个仿射类，所以存在一个仿射变换$\tau$把$C$变成$C_1$。由于共轭直径是仿射概念，因此$\tau$把$l_1$和$l_2$变成$C_1$的一对共轭直径$l'_1$和$l'_2$。设$C$被$l_1$和$l_2$分成的

四块是 $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}$，设 $C_1$ 被 $l_1'$ 和 $l_2'$ 分成的相应四块是 $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}$，则显然 $\tau$ 把 $C^{(i)}$ 变成 $C_1^{(i)}$，$i=1,2,3,4$。因为圆 $C_1$ 的共轭直径互相垂直，所以 $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}$ 的面积相等。由于 $C_1^{(i)}$ 与 $C^{(i)}$ 的面积之比等于 $\tau$ 的变积系数，$i=1,2,3,4$，所以 $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}$ 的面积也相等。

## 习 题 6.5

1． 证明长半轴为 $a$、短半轴为 $b$ 的椭圆的面积是 $\pi ab$。

2． 证明：以椭圆的一对共轭半径为边的平行四边形的面积是一个常数。

3． 证明：椭圆的过共轭直径与椭圆的交点的切线构成的平行四边形的面积是一个常数。

4． 证明：椭圆的任一外切平行四边形的两条对角线所在的直线是椭圆的一对共轭直径。

5． 证明：以椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的任意一对共轭直径和椭圆的交点为顶点的平行四边形的面积都等于 $2ab$。

6． 证明：所有内接于椭圆的四边形中间，面积最大的是以一对共轭直径和椭圆的交点为顶点的平行四边形。

7． 任给一个三角形 $ABC$，设 $D, E, F$ 分别是 $AB, BC, CA$ 的中点。证明：存在一个椭圆，它与 $\triangle ABC$ 的三边分别相切于 $D, E, F$；并且求出这个椭圆的面积与 $\triangle ABC$ 的面积的比值。

8． 能否在椭圆里作一个内接三角形，使得过它的每个顶点的切线都与对边平行？如果椭圆的长、短半轴分别等于 $a$ 和 $b$，这个三角形的面积等于什么？

9． 证明：内切于一个平行四边形的二次曲线必是中心型二次曲线，且其中心就是平行四边形的对称中心。

10．证明：双曲线的切线和它的渐近线确定的三角形的面积是一个常数。

11．证明：双曲线两条渐近线之间的切线线段被切点等分。

*12．证明：相似变换把任意一个圆变成圆。

*13．证明：如果平面的仿射变换 $\tau$ 将一个圆变成它自身，则 $\tau$ 是正交变换。

## §6　空间的正交变换和仿射变换

**定义6.14**　空间的一个点变换 $\sigma$，如果它在一个直角坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad (6.27)$$

其中系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵，则称 $\sigma$ 是**空间的正交（点）变换**。

此定义与直角坐标系的选择无关。

**例6.10**　空间中由向量 $\boldsymbol{v}(a_1,a_2,a_3)$ 确定的平移是空间的正交变换，它在给定的直角坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \qquad (6.28)$$

**例6.11**　空间中所有点绕一条定直线 $l$ 的旋转是空间的正交变换，理由如下：以 $l$ 为 $z$ 轴建立直角坐标系 Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$。设旋转的角度为 $\theta$，设 $\boldsymbol{e}_i$ 转 $\theta$ 角后变成 $\boldsymbol{e}'_i$，$i=1,2$。于是Ⅱ$[O;\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$也是直角标架，并且易看出Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

设空间中任一点 $P(x,y,z)$ 在旋转下的象为 $P'(x',y',z')$，显然 $p'$ 的Ⅱ坐标等于 $P$ 的Ⅰ坐标 $(x,y,z)$，对 $P'$ 点用直角坐标变换公式得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (6.29)$$

(6.29)也表示了 $P$ 和它的象 $P'$ 的Ⅰ坐标之间的关系，因此这是所给旋转在Ⅰ中的公式，由于它的系数矩阵是正交矩阵，所以空间绕定直线的旋转是正交变换，这条定直线称为转轴。

**例6.12** 空间对于一个平面 $\pi$ 的反射（称为**镜面反射**）就是把每一点变到它对于这个平面的对称点，这是正交变换。理由是：我们可以取平面 $\pi$ 为 $xOy$ 面建立一个直角坐标系，则任一点 $P(x,y,z)$ 对于 $xOy$ 面的对称点 $P'(x',y',z')$ 为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z. \end{cases} \qquad (6.30)$$

(6.30)的系数矩阵是正交矩阵，因此，镜面反射是正交变换。

空间的正交变换有下列性质：

(1) 保持点之间的距离不变；

(2) 两个正交变换的乘积仍是正交变换；

(3) 恒等变换是正交变换；

(4) 正交变换是可逆的，并且它的逆变换也是正交变换；

(5) 把平面变成平面；

(6) 把平行平面变成平行平面；

(7) 把相交平面变成相交平面；

(8) 把直线变成直线；

(9) 把线段变成线段，且保持线段的分比不变；

(10) 把平行直线变成平行直线；

(11) 空间的正交点变换 $\sigma$ 引起了空间的一个正交向量变换

$\bar{\sigma}$：设 $m=\overrightarrow{PQ}$，则 $\bar{\sigma}(m):=\overrightarrow{P'Q'}$，其中 $P'=\sigma(P)$，$Q'=\sigma(Q)$。$\bar{\sigma}$ 保持向量的加法，保持向量的数乘，保持向量的内积不变，保持向量的长度不变，保持向量的夹角不变；

（12）空间的正交变换把任意一个直角标架Ⅰ变成直角标架Ⅱ，且任一点 $P$ 的Ⅰ坐标等于它的象 $P'$ 的Ⅱ坐标；

（13）若两个正交变换对于同一个直角标架的作用相同，则它们相等。

**定义6.15** 空间的正交变换 $\sigma$，若它在直角坐标系中的公式的系数矩阵 $A$ 的行列式 $|A|=+1$，则称 $\sigma$ 为**第一类的**；若 $|A|=-1$，则称 $\sigma$ 是**第二类的**。

***命题6.1** 若 $\sigma$ 是第一类正交变换，且它保持原点 $O$ 不动，则 $\sigma$ 必定是绕过原点的某一条定直线的旋转。

****证明** 因为 $\sigma$ 保持原点不动，所以 $\sigma$ 在直角坐标系Ⅰ中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

其中 $A$ 是正交矩阵，且 $|A|=+1$。由于 $A$ 是3级矩阵，因此1是 $A$ 的特征值。由于正交矩阵的特征多项式的根的模等于1，因此可以设 $A$ 的特征多项式的另两个根为 $\cos\theta\pm i\sin\theta$。于是存在一个正交矩阵 $T$ 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

取另一个直角标架Ⅱ，使Ⅱ的原点仍为 $O$，且Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵为 $T$，则Ⅰ到Ⅱ的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix},$$

其中$(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$是点$(x,y,z)$在Ⅱ中的坐标。于是$\sigma$在Ⅱ中的公式为

$$T\begin{pmatrix}\tilde{x}'\\ \tilde{y}'\\ \tilde{z}'\end{pmatrix}=AT\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}'\\ \tilde{y}'\\ \tilde{z}'\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}.$$

由此看出，$\sigma$是绕Ⅱ的$\tilde{z}$轴的旋转，转角为$\theta$。

***命题6.2** 若$\sigma$是第二类正交变换，且保持原点$O$不动，则$\sigma$必为一个镜面反射，或者为一个镜面反射与一个绕定直线的旋转的乘积。

证明与命题6.1的证明类似，只需注意：因为$|A|=-1$，所以$-1$是$A$的特征值。

由正交变换的性质(2)，(3)，(4)知，空间的所有正交变换组成一个变换群。

**定义6.16** 空间的一个点变换$\tau$，如果它在一个仿射坐标系中的公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \tag{6.31}$$

其中系数矩阵$A$为非奇异的，则称$\tau$是**空间的仿射(点)变换。**

此定义与仿射坐标系的选择无关。

空间的仿射变换的性质有：

(1) 两个仿射变换的乘积仍是仿射变换；

(2) 恒等变换是仿射变换；

(3) 仿射变换是可逆的，且它的逆变换是仿射变换；

(4) 把平面变成平面；

(5) 把平行平面变成平行平面；

(6) 把相交平面变成相交平面；

(7) 把直线变成直线；

(8) 保持共线三点的简单比值不变；

(9) 把线段变成线段；

(10) 把平行直线变成平行直线；

(11) 空间的仿射点变换 $\tau$ 引起了空间一个仿射向量变换 $\bar{\tau}$，并且 $\bar{\tau}$ 保持向量的加法，保持向量的数乘；

(12) 把任意一个仿射标架Ⅰ变成仿射标架Ⅱ，且任一点 $P$ 的Ⅰ坐标等于它的象 $P'$ 的Ⅱ坐标；

(13) 若两个仿射变换在同一个仿射标架上的作用相同，则它们相等。

**定理6.12** 空间中任给两组不共面的四点 $A_1,A_2,A_3,A_4$ 和 $B_1,B_2,B_3,B_4$，必然存在唯一的仿射变换把 $A_i$ 变成 $B_i$，$i=1,2,3,4$。

证明方法与定理6.9类似。

**定理6.13** 设空间的仿射变换 $\tau$ 在仿射坐标系Ⅰ中的公式为(6.31)，对于空间中任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，设它们在 $\bar{\tau}$ 下的象分别是 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'$，则有

$$\frac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}'}{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=|A|.$$

**证明** 设 $\tau$ 把仿射标架Ⅰ$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 变成Ⅱ$[O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$，由 $\tau$ 的公式(6.31)得，$\boldsymbol{e}_i'$ 的Ⅰ坐标为 $(a_{1i},a_{2i},a_{3i})$，$i=1,2,3$。因此

$$\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_3'=|A|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3.$$

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的Ⅰ坐标分别为 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$，则 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'$ 的Ⅱ坐标也分别是这些。于是

$$\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}'=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_3',$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3.$$

所以

$$\frac{\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{c}'}{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=\frac{\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_3'}{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}=|A|.$$

易知仿射变换 $\tau$ 的公式中的系数矩阵的行列式与坐标系 的选择无关，因此可以称 $|A|$ 是 $\tau$ 的行列式，记作 $d_\tau$。

定理6.13表明，空间的一个仿射变换 $\tau$ 按同一比值 $d_\tau$ 改变任意平行六面体的定向体积；从而它按同一比值 $|d_\tau|$ 改变空间中任意区域的体积。

由仿射变换的性质(1)，(2)，(3)知，空间中所有仿射变换组成一个变换群。

## 习 题 6.6

1. 证明下述空间的点变换是第一类正交变换，并且求转轴。

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z, \\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \\ z'=-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}y+\dfrac{4}{3\sqrt{2}}z. \end{cases}$$

2. 在直角坐标系中，求出把点(0,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)分别变成点(0,0,0)，(0,0,1)，(1,0,0)的正交变换公式。

3. 在直角坐标系中，求出使原点不动，并且把 $x$ 轴变成直线 $\dfrac{x}{\lambda}=\dfrac{y}{\mu}=\dfrac{z}{\nu}$ 的正交变换公式。

4. 设 $\sigma$ 是空间的第一类正交变换，证明：对于空间的任意

两个向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，有

(1) $\bar{\sigma}(\boldsymbol{v}_1)\cdot\bar{\sigma}(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2$；

(2) $\bar{\sigma}(\boldsymbol{v}_1)\times\bar{\sigma}(\boldsymbol{v}_2)=\bar{\sigma}(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)$。

5. 建立把点$(0,0,0)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$分别变为点$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$，$(x_3,y_3,z_3)$，$(x_4,y_4,z_4)$的仿射变换公式。

6. 求出在仿射变换

$$\begin{cases} x'=2x+y+z-1, \\ y'=x+z-1, \\ z'=-z-2. \end{cases}$$

下，坐标平面 $xOz$ 所变成的平面。

7. 求保持 $xOy$ 面上每一点都不动的一切仿射变换。

8. 证明：如果一个仿射变换有三个不共线的不动点，则这三点所确定的平面上的每一点都是不动点；又如果这个仿射变换有四个不共面的不动点，则它是恒等变换。

9. 求空间的仿射变换，已知

(1) 平面 $x+y+z=1$ 上每个点都是不动点，而点$(1,-1,2)$变成点$(2,1,0)$；

(2) 直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$上每个点都是不动点，而点$(0,0,0)$和$(1,0,0)$互变；

(3) 保持平面 $x+y-1=0$，$y+z=0$，$x+z+1=0$ 都不变，而点$(0,0,1)$变成点$(1,1,1)$ 。

10. 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

围成的区域的体积。

*11. 不用命题6.1，证明第一类正交变换 $\sigma$ 至少有两个不动点。

# 第七章　射影平面和它的射影变换

迄今为止，我们介绍了解析几何的主要研究方法：坐标法，向量法，坐标变换法以及点变换（正交变换和仿射变换）法，并且利用这些方法研究了一些图形的度量性质和仿射性质。所有这些都是在普通的欧儿里得空间（或平面）进行的。

在上一章我们看到平面的仿射变换的重要特性是：把共线的三点变成共线的三点。在实际生活中我们还会遇到更一般的从一个平面到另一个平面的保持点的共线关系不变的映射。譬如，航空摄影时我们要把地面（假定是平的）上的景物摄到底片上，这可以看成是地面 $\pi_0$ 到底片 $\pi_1$ 的一种保持点的共线关系不变的映射。如果 $\pi_0$ 和 $\pi_1$ 平行，则上一章讲的平面的仿射变换的理论可以完全照搬到这种映射上。但是，由于飞机在飞行时的颠簸，所以装在飞机上的摄影机的镜头一般地说不是正好铅直地对着大地，从而底片 $\pi_1$ 与地面 $\pi_0$ 不平行，这种情形如图7.1所示，即，

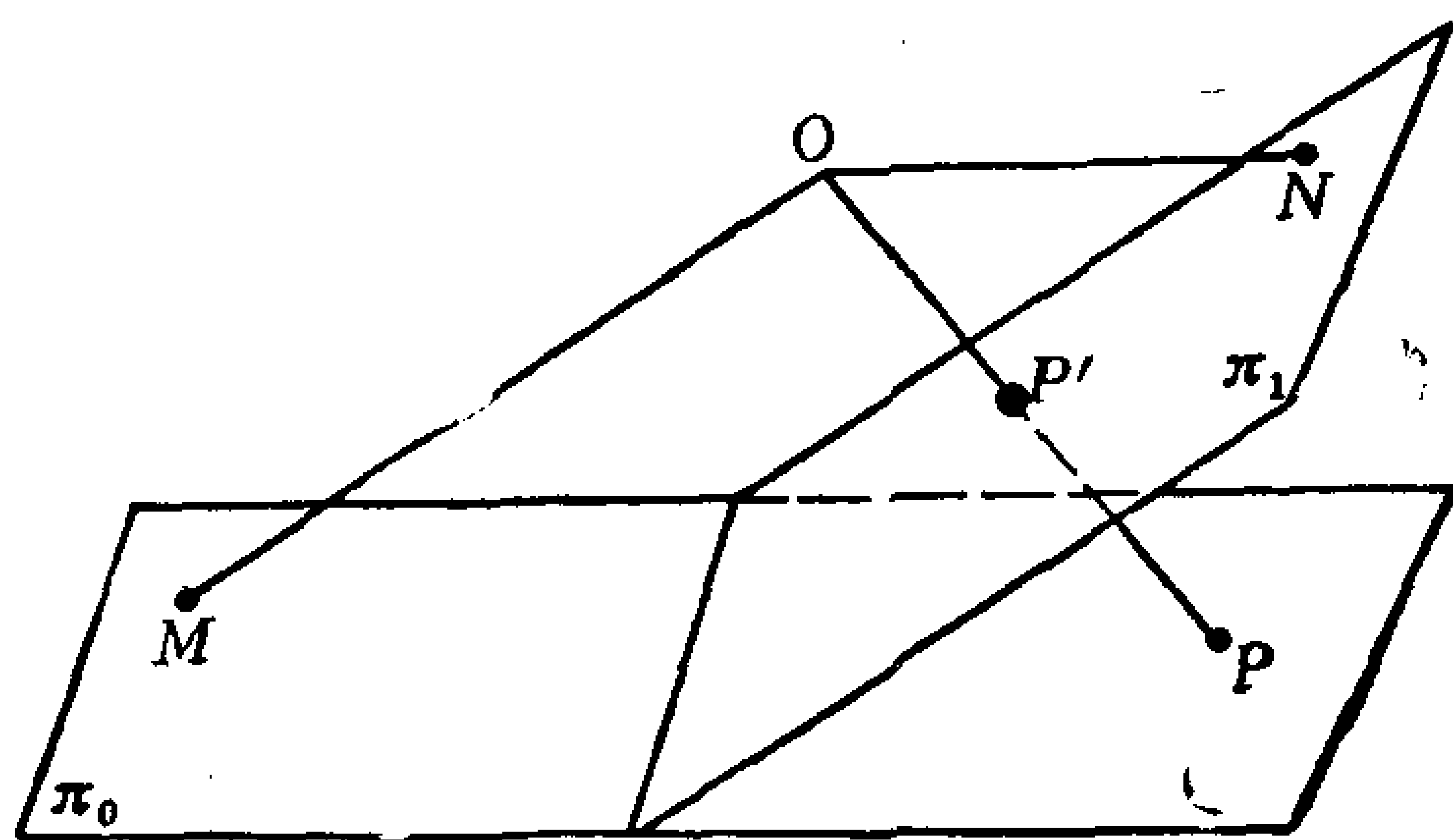



图 7.1

$\pi_0$ 和 $\pi_1$ 是两个相交平面，$O$ 是不在这两个平面上的点。将平面 $\pi_0$ 上的点 $P$ 变成平面 $\pi_1$ 与直线 $OP$ 的交点 $P'$ 的法则称为平面 $\pi_0$ 到 $\pi_1$ 上以 $O$ 为投影中心的**中心投影**。显然，在中心投影下，点的共线关系仍然是保持的。但是，$\pi_0$ 上的点 $M$ 如果使得 $OM \parallel \pi_1$，

则$M$在$\pi_1$上没有象；同样地，$\pi_1$上的点$N$如果使得$ON \parallel \pi_0$，则$N$在$\pi_0$上没有原象。为了弥补这些缺陷，使中心投影成为映射，并且为双射，就需要在平面$\pi_1$上添加一些新的点，使得$\pi_0$上$M$这样的点（它们形成一条直线）都有象；而在平面$\pi_0$上也添加一些新的点，使得$\pi_1$上$N$这样的点（它们也形成一条直线）都有原象。这样的添补就形成了**射影平面**的概念。

这一章就是研究射影平面；研究射影平面到自身（或者到另一个射影平面）的具有保持点的共线关系不变的特性的映射，称之为射影变换（或者射影映射）；以及研究射影平面上的一次曲线和二次曲线，即，一次和二次曲线的射影理论。

## §1 射影平面，齐次坐标

### 1.1 中心为$O$的把与扩大的欧几里得平面

本章的开头我们讲到为了使中心投影成为双射就应当在欧几里得平面上添加一些新的点。为了进行这项添补工作，我们再仔细考察一下中心投影的过程。为此我们先引进一些基本定义。

我们知道，基本的几何元素是点、直线和平面，一般的图形都是由这些基本元素按照一定的关系组成的。它们之间最简单的关系是位置关系，譬如，一点在一直线上，一直线经过一点，一平面经过一直线等。为了简单起见，这种关系我们将统一地用**“关联”**来表示。譬如，点$P$在直线$l$上，就说点$P$与直线$l$关联；直线$l$经过点$P$，就说直线$l$与点$P$关联。显然“关联”关系是对称的，即，譬如若点$P$与直线$l$关联，则必然有直线$l$与点$P$关联。

我们现在不考虑距离、角度、面积以及平行等这些比较复杂的度量性质和仿射性质，而只考虑基本元素之间最简单的位置关系：“关联”。用这样的观点来看一个平面$\pi$，那就是只考虑与此平面关联的元素，即，我们看到的就是：所有与平面$\pi$关联的点

$P$ 和直线 $l$。这样，平面 $\pi$ 就被看成一些点和直线的集合，记作 $\pi=[P,l]$。用同样的观点来看点 $O$，那末我们看到的就是：所有与点 $O$ 关联的平面 $\lambda$ 和直线 $p$。今后我们将与一个点 $O$ 关联的所有平面和直线组成的集合称为**中心为** $O$**的把**，仍用与点同样的符号 $O$ 来表示这个把，并且记作 $O=[\lambda,p]$。

现在我们从这个观点来考察中心投影的过程，就发现把与平面之间存在着简单而且自然的对应关系。设点 $O$ 不在平面 $\pi$ 上，则平面 $\pi$ 上的每个点 $P$ 决定把 $O$ 的一条直线 $OP$；平面 $\pi$ 上的每条直线 $l$ 决定把 $O$ 的一个平面，即，点 $O$ 与直线 $l$ 所确定的平面，记作 $Ol$。这样就得到从平面 $\pi$ 到把 $O$ 的一个对应关系，称为 $\pi$ 在把 $O$ 上的**射影**，并记作

$$O[P,l]=[OP,Ol].$$

类似地，反过来从把 $O$ 到平面 $\pi$ 也有一个对应关系：把 $O$ 的平面 $\lambda$ 与平面 $\pi$ 交于一条直线，这条直线用 $\pi\lambda$ 表示，把 $O$ 的直线 $p$ 与平面 $\pi$ 交于一个点，这个点用 $\pi p$ 表示，我们将这个对应关系称为把 $O$ 在平面 $\pi$ 上的**截影**，并记作

$$\pi[\lambda,p]=[\pi\lambda,\pi p].$$

容易看出，经过射影和截影，"关联"关系是不改变的，这个事实具有基本的重要意义。

现在我们看出，中心投影可以分解成为射影和截影两个步骤：从平面 $\pi_0$ 到平面 $\pi_1$ 上以点 $O$ 为投影中心的中心投影实际上就是 $\pi_0$ 在把 $O$ 上的射影与把 $O$ 在 $\pi_1$ 上的截影的复合(乘积)。图 7.1 中，$\pi_0$ 上的点 $M$ 在中心投影下沒有象，这是因为把 $O$ 的直线 $OM$ 在截影下沒有象；$\pi_1$ 上的点 $N$ 在中心投影下沒有原象，这是因为把 $O$ 的直线 $ON$ 在射影下沒有原象。为什么把 $O$ 中有的直线在截影下沒有象，有的直线在射影下沒有原象，其原因就在于欧几里得平面的结构与把的结构是不同的，弥补这一缺陷的方法应当是以把作为模型来将欧几里得平面加以扩充。

现在我们就以把 $O$ 作为模型来扩充欧几里得平面，使得射影

和截影能够成为它们之间的保持关联关系不变的双射。取一个欧几里得平面$\pi_0$，使点O不在$\pi_0$上。容易看出，在从$\pi_0$到把O的射影下，把O中与$\pi_0$平行的平面$\pi_0'$以及$\pi_0'$上的每条直线都没有原象；而在从把O到$\pi_0$的截影下，把O中的平面$\pi_0'$以及$\pi_0'$上的每条直线都没有象。为了使射影和截影都成为双射，就应当在$\pi_0$上加进一条直线来和把O的平面$\pi_0'$对应，应当在$\pi_0$上加进一些点来和把O的平面$\pi_0'$上的直线对应，而且这么添加了新的元素(直线和点)以后，应该使射影和截影仍保持关联关系不变 为此采取如下的扩充方法：考虑到$\pi_0$上的每一条直线$l$在把O中的对应平面$Ol$与$\pi_0'$有唯一的交线$l'$(见图7.2)，因此规定在$\pi_0$的每一条直线$l$上加进唯一的一个点来与$l'$相对应，这个点称为**无穷远点**。由于$\pi_0$上平行的直线在把O中的对应平面与$\pi_0'$的交线都相同(见图7.2)，而$\pi_0$上不平行的直线在把O中的对应平面与$\pi_0'$的交线都不同，因此规定：$\pi_0$上平行的直线有相同的无穷远点，$\pi_0$上不平行的直线则有不同的无穷远点。最后为了与把O中的平面$\pi_0'$对应，我们在$\pi_0$上还要加进一条直线作为$\pi_0$与$\pi_0'$的交线，这条直线称为**无穷远直线**，于是无穷远直线对应于把O的平面$\pi_0'$，由于无穷远点所对应的把O的直线都在$\pi_0'$上，因此规定无穷远点都在无穷远直线上。

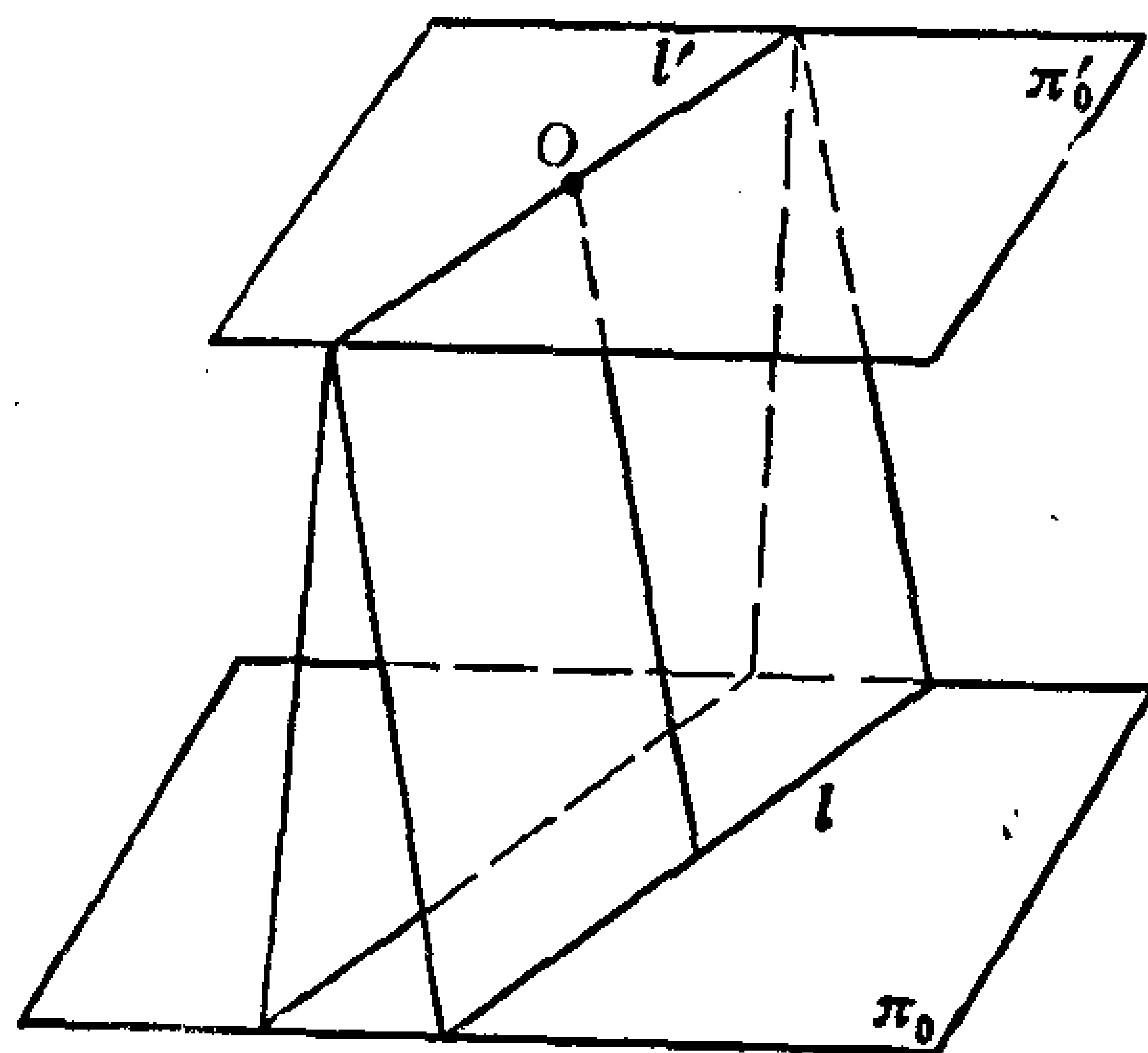


图 7.2

把上面的结果总结一下：对于欧几里得平面$\pi_0$，在它的每一条直线上加进了一个无穷远点$P_\infty$，平行的直线有相同的无穷远点，不平行的直线有不同的无穷远点（这样一来，与每个无穷远点对应的是一个完全确定的方向）；所有的无穷远点组成一条无

穷远直线$l_\infty$。补充了这样一些无穷远点和一条无穷远直线的欧几里得平面就称为一个**扩大的欧几里得平面**，简称为**扩大的欧氏平面**，记作$\pi_0$。

显然，扩大的欧氏平面$\pi_0$与把$O$之间的射影和截影就都成了保持关联关系不变的双射了。换句话说，在扩大的欧氏平面$\pi_0$与把$O$之间存在一个一一对应，并且这个一一对应保持关联关系不变。说得更详细一点就是：扩大的欧氏平面$\pi_0$上的全体点组成的集合与把$O$的全体直线组成的集合存在一个一一对应，$\pi_0$的所有直线组成的集合与把$O$的所有平面组成的集合也存在一个一一对应，并且如果$\pi_0$上的点$P$与直线$l$关联，则把$O$中跟$P$对应的直线便与跟$l$对应的平面关联。因此，从我们只考虑基本几何元素之间的关联关系这一观点来看，扩大的欧氏平面的结构与把的结构在本质上是一样的。由此我们抽象出射影平面的概念。

## 1.2 射影平面的定义和几何模型

**定义7.1** 由两类分别称为"点"和"直线"的元素所构成的集合$S$，如果在其中的"点"和"直线"之间规定了某种称为"关联"的关系，并且$S$中所有的"点"和所有"直线"可以分别与欧氏空间中一个把$O$的所有直线和所有平面建立一一对应关系，使得这对应关系保持关联性，则称$S$为**射影平面**。

**例7.1** 欧氏空间中把$O$本身，如果称其中的直线为"点"，称其中的平面为"直线"，那么它就是一个射影平面。并且任意一个把$W$也是一个射影平面，这是因为通过平移可以在把$W$与把$O$之间建立一一对应关系，并且这种对应保持关联性。

**例7.2** 扩大的欧氏平面$\pi_0$是一个射影平面。

**例7.3** 取定一个球面，球心为$O$，将球面的每一对对径点（位于直径两端的一对点）看成一个"点"，将球面的每一个大圆（球面与过球心的平面的交线）看成一条"直线"，如果一对对径点在一个大圆上，则认为该"点"在该"直线"上，这样我

们就得到一个射影平面。这是因为，取把O，把O里的每一条直线 $l$ 与球面有两个交点，即为球面的一对对径点，由于将它们看成一个“点”，因此 $l$ 对应于这个“点”；把O里的每个平面 $\pi$ 与球面相交于一个大圆，因此 $\pi$ 对应于一条“直线”，这些分别是一一对应，并且若 $l$ 在 $\pi$ 上，则 $l$ 对应的“点”在 $\pi$ 对应的“直线”上，即这个对应保持关联性。因此，给了一个球面，按照上述解释后就成为一个射影平面(见图7.3)。

任意两个射影平面，由于它们的“点”、“直线”分别有一一对应关系，且这种对应保持关联性，因此它们的有关“点”和“直线”的关联关系方面的性质是相同的，于是我们在研究这方面的性质时，就只要取一个射影平面作为代表来研究就可以了。今后我们常取把O或者扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 作为代表，这是因为把O中“点”和“直线”的关联关系非常直观，并且由于把O是在欧氏空间中，这样我们可以运用欧氏空间的有关知识来研究把O的性质；至于扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 由于它是由欧氏平面扩充而得到的，所以可通过 $\pi_0$ 来解决欧氏平面上的一些问题。

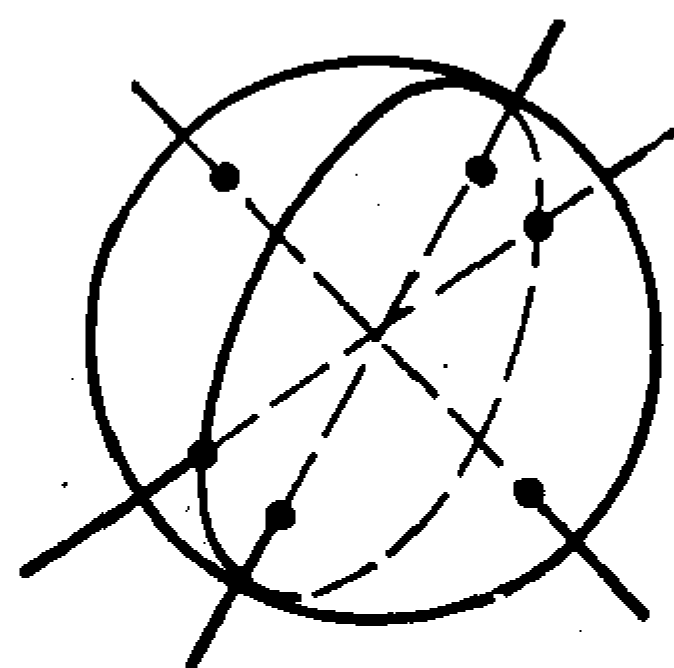


图 7.3

现在我们就利用把O来研究射影平面上点与直线的关联关系。从把O看，两条（不同的）直线唯一地决定一个通过它们的平面；反过来，两个（不同的）平面相交于唯一的一条直线。所以，在射影平面上就有：

1. 两个点必与唯一的一条直线关联；

2. 两条直线必与唯一的一个点关联。

现在我们在扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 上检验一下上述事实。

欧氏平面上的一条直线(简称为欧氏直线)加进一个无穷远点后就成为扩大的欧氏平面上的一条直线，这样的直线称为扩大的欧氏平面上的射影直线。如上所述，$\pi_0$ 上的一条射影直线是由

$\pi_0$ 的一条欧氏直线唯一确定的。从而在 $\pi_0$ 的全体射影直线与 $\pi_0$ 的全体直线之间存在一个一一对应关系。但是要注意 $\pi_0$ 上除了射影直线外，还有一条无穷远直线。

现在来看 $\pi_0$ 上两个点必与唯一的一条直线关联的意义：如果这两个点都是 $\pi_0$ 上的通常点，则它们决定一条欧氏直线，从而就决定了一条射影直线。如果这两个点中的一个是通常点，另一个是无穷远点，那么它们也决定一条欧氏直线（就是通过这个通常点而与给定的无穷远点所对应的方向平行的直线），因而它们也就决定了一条射影直线。如果这两个点都是无穷远点，则它们决定了唯一的一条无穷远直线。

再看 $\pi_0$ 上两条直线必与唯一的一个点关联的意义：两条射影直线交于一个通常点（如果它们对应的两条欧氏直线不平行）或者交于一个无穷远点（如果它们对应的两条欧氏直线平行）；一条射影直线和无穷远直线交于一个无穷远点。

由此可见，平行的概念在射影平面上是没有意义的，因为射影平面上的任意两条直线都相交。

射影平面与欧氏平面还有一些不同之处。例如，射影平面上的直线是封闭的，好象圆周似的。这从按照把的模型引进无穷远点的规定可以直观地看出这一点：考虑 $\pi_0$ 上两个通常点在一条直线 $l$ 上沿着相反的方向跑向无穷远，在把 $O$ 中与这两个点对应的两条直线将都趋于把 $O$ 中与 $l$ 平行的那条唯一的直线，这说明 $\pi_0$ 上两个点在一条直线上沿着相反的方向远离时将达到同一个无穷远点。又如，在欧氏平面 $\pi_0$ 上，一条直线将平面分成两部份；但是射影平面 $\pi_0$ 上的一条直线则不能分割射影平面，譬如在 $\pi_0$ 上把无穷远线除掉，亦即除掉所有的无穷远点，我们得到的是一个欧氏平面 $\pi_0$，可见无穷远线并没有把 $\pi_0$ 分成两块；由于从把的结构上看，射影平面上的无穷远线与其它直线并无本质的不同，因此，$\pi_0$ 上的任一条直线都不能把 $\pi_0$ 分成两块。

## 1.3 点的齐次坐标

解析几何的基本方法是坐标法，因此自然会想到在射影平面上建立某种坐标系，使得每个点都有坐标。以前所讲的仿射坐标（或直角坐标）只能表示射影平面 $\pi_0$ 上的通常的点，不能表示无穷远点，因此，这就需要把坐标的概念加以推广，使它既能表示通常的点也能表示无穷远点。

取扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 作为射影平面的代表，为了给 $\pi_0$ 上的每个点建立坐标，考虑到 $\pi_0$ 上的全体点与把 $O$ 中的全体直线在射影和截影下有一一对应关系，而把 $O$ 中的每条直线又由该直线的方向完全决定，因此，自然想到下述方法：

**定义7.2** 对于扩大的欧氏平面 $\pi_0$，在 $\pi_0$ 上取一个仿射标架 $[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，在 $\pi_0$ 外取一点 $O$，令 $\boldsymbol{e}_3=\overrightarrow{OO_1}$，对于 $\pi_0$ 上任意一点 $M$，将 $M$ 在把 $O$ 中所对应的直线 $l$ 的任一方向向量 $\boldsymbol{v}$ 在空间仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 下的坐标 $(x_1,x_2,x_3)$ 称为点 $M$ 在 $[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 下的**齐次仿射坐标**，简称为**齐次坐标**。

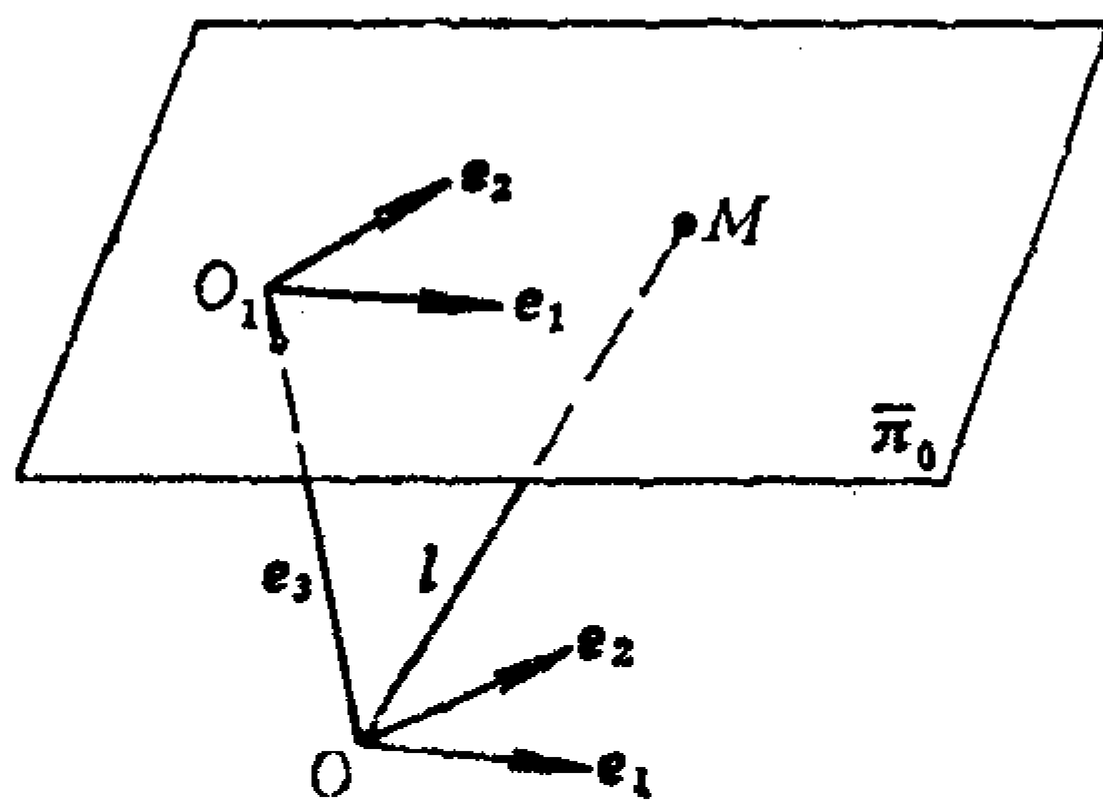


图 7.4

加上“齐次”两个字的原因是：对于任一非零实数 $\lambda$，$(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$ 与 $(x_1,x_2,x_3)$ 表示把 $O$ 中同一条直线，从而它们表示 $\pi_0$ 上的同一个点，因此，若 $(x_1,x_2,x_3)$ 是 $\pi_0$ 上点 $M$ 的齐次坐标，那么 $(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)(\lambda\neq 0)$ 也是点 $M$ 的齐次坐标。这说明：$\pi_0$ 上的每一个点 $M$ 的齐次坐标不唯一，但是它们成比例。

如果 $(x_1,x_2,x_3)$ 与 $(y_1,y_2,y_3)$ 不成比例，则它们表示把 $O$ 中不同的直线，从而它们表示 $\pi_0$ 上不同的点，因此，$\pi_0$ 上不同点的齐次坐标不成比例。

显然，平面 $\pi_0$ 在$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的方程是 $z=1$，于是向量 $\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3)$与 $\pi_0$ 平行的充分必要条件是 $x_3=0$。由于 $\pi_0$ 上通常点$M$对应于把$O$中与$\pi_0$相交的直线，因此它的齐次坐标$(x_1,x_2,x_3)$中 $x_3\neq0$。由于无穷远点对应于把$O$中与 $\pi_0$ 平行的直线，因此无穷远点的齐次坐标必形如$(x_1,x_2,0)$，其中 $x_1,x_2$ 不全为零。

现在我们来说明齐次坐标与仿射坐标的关系。设点$M$是平面 $\pi_0$ 上的通常点，$(x,y)$是它对于标架 $[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 的仿射坐标，则 $\overrightarrow{OM}$ 对于标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$的坐标就是$(x,y,1)$，于是点$M$的齐次坐标$(x_1,x_2,x_3)$与$(x,y,1)$成比例：

$$(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x,y,1),$$

其中 $\lambda\neq0$。从而得

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3},$$

其中 $x_3\neq0$。因此，通常点的齐次坐标和仿射坐标可以互相确定。现在考虑 $\pi_0$ 上的无穷远点$P_\infty$，设它的齐次坐标为$(x_1,x_2,0)$，这时在平面 $\pi_0$ 上对于标架$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$具有坐标$(x,y)=(x_1,x_2)$的向量显然平行于 $P_\infty$ 所对应的把$O$中的直线(因为这条直线的方向向量为$(x_1,x_2,0)$)；反过来，平面 $\pi_0$ 上的每一个方向 $(x,y)$，在它的两个坐标 $x,y$ 之后再添上一个 0，我们就可以得到这个方向上的无穷远点 $P_\infty$ 的齐次坐标$(x,y,0)$。因此，无穷远点 $P_\infty$ 的齐次坐标与它所对应的方向的仿射坐标(对于标架$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$)可以互相确定。综上所述，我们看到，$\pi_0$ 上每一个点的齐次坐标由仿射坐标系$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$完全决定，而与点$O$的选取无关。

有时我们把通常点$M$的仿射坐标$(x,y)$称为它的**非齐次坐标**。

### 1.4 直线在齐次坐标中的方程

$\pi_0$ 上每个点都有齐次坐标，从而 $\pi_0$ 上每一条直线就可以用关于齐次坐标 $x_1,x_2,x_3$ 的方程来表示。

考虑 $\pi_0$ 上的一条直线 $AB$，设 $A,B$ 在$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$中的齐次坐标分别为$(a_1,a_2,a_3)$,$(b_1,b_2,b_3)$，设$A,B$分别对应于把 $O$ 中的直线 $l_1,l_2$，则在$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中坐标为$(a_1,a_2,a_3)$,$(b_1,b_2,b_3)$的向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 分别为 $l_1,l_2$ 的方向向量。设$\pi_0$上任一点$M$的齐次坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，则$M$所对应的把$O$中的直线 $l_0$ 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}_0$ 的仿射坐标为$(x_1,x_2,x_3)$。

点 $M(x_1,x_2,x_3)$在直线 $AB$ 上的充分必要条件是把$O$里的直线 $l_0$ 在 $l_1,l_2$ 决定的平面上，于是 $\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 共面，从而

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \\ x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3, \end{cases} \tag{7.1}$$

其中 $\lambda,\mu$ 是不全为零的实数；或者

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0, \tag{7.2}$$

其中

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

由于 $A,B$ 是不同的两点，因此$(a_1,a_2,a_3)$与$(b_1,b_2,b_3)$不成比例，从而 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 不全为零，这说明：直线 $AB$ 在齐次坐标中的方程(7.2)是三元一次**齐次方程**。反过来，任意一个三元一次齐次方程都表示射影平面上的一条直线，这也是容易证明的。

(7.1) 称为直线 $AB$ 在齐次坐标中的**参数方程**。

由于无穷远直线是由所有无穷远点组成的，而无穷远点的齐次坐标都形如$(x_1,x_2,0)$，因此，无穷远直线的方程为 $x_3=0$。而射影直线的齐次方程中 $x_1,x_2$ 的系数一定不全为零。

从上面的推导过程还看到：

(1) $\pi_0$ 上三点 $A(a_1,a_2,a_3)$,$B(b_1,b_2,b_3)$,$C(c_1,c_2,c_3)$共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) 齐次方程 $\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3=0$ 与 $\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$表示 $\pi_0$ 上的同一条直线(对应于把O中的同一个平面)的充分必要条件是$(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$与$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$成比例。因此，我们可以把齐次方程的系数$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$看成直线的坐标，就叫做**直线的齐次坐标**。显然，无穷远直线的齐次坐标为(0,0,1)；射影直线的齐次坐标形如$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，其中 $\eta_1,\eta_2$不全为零。容易看出，同一条直线的齐次坐标不唯一，但它们成比例；不同直线的齐次坐标不成比例。

既然直线也有齐次坐标，因此从齐次坐标来看，射影平面上的点和直线的地位是对等的，点和直线对于关联关系而言也是对等的：点$(x_1,x_2,x_3)$与直线$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$关联的充分必要条件是

$$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0,$$

因此，对于固定的直线$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，方程(7.2)是此直线上的全体的点所适合的方程，称为**直线的点方程**。

由于直线$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$与点$(x_1,x_2,x_3)$关联的充分必要条件也是(7.2)，因此，对于固定的点$(x_1,x_2,x_3)$，方程(7.2)是与点$(x_1,x_2,x_3)$关联的全体直线所适合的方程，称为**点的线方程**。

从上面的讨论可以看到，在射影平面上，基本的几何元素是点和直线，基本的关系是关联关系。点和直线在射影平面上的地位是对称的。

下面我们要讨论射影平面的另外一个模型：解析模型，了解这个模型对于读者今后想进一步学习射影几何是有帮助的。

## 1.5 射影平面的解析模型

从上述看出，$\pi_0$ 上的点(或直线)的齐次坐标不唯一，但它

们成比例，为了使点$M$对应于唯一的对象，就需要把所有有序三元实数组所组成的集合按照成比例的关系进行分类。

**定义7.5** 称有序三元实数组$(x_1,x_2,x_3)$与$(y_1,y_2,y_3)$**等价**，如果存在实数$\lambda\neq0$，使得$(y_1,y_2,y_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$，此时记作$(x_1,x_2,x_3)\sim(y_1,y_2,y_3)$。

所定义的关系～显然具有下列性质：

(1) 反身性，即，任一有序三元实数组与自身等价；

(2) 对称性，即，若$(x_1,x_2,x_3)\sim(y_1,y_2,y_3)$，则

$$(y_1,y_2,y_3)\sim(x_1,x_2,x_3);$$

(3) 传递性，即，若$(x_1,x_2,x_3)\sim(y_1,y_2,y_3)$，$(y_1,y_2,y_3)\sim(z_1,z_2,z_3)$，则

$$(x_1,x_2,x_3)\sim(z_1,z_2,z_3).$$

对于每一个有序三元实数组$(x_1,x_2,x_3)$，把所有与它等价的三元实数组组成的集合称为一个**类**，记作$(x_1:x_2:x_3)$，则所有有序三元实数组的集合被划分成了一些类，使得每个有序三元实数组属于且只属于一个类；同一类里的任意两个三元实数组是等价的(即成比例)；不同类里的两个三元实数组是不等价的（即不成比例)。

$(0:0:0)$称为**零类**，其他类称为**非零类**。

**定理7.1** 把每一个有序三元实数组的非零类看成“点”，把满足方程$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$(其中$\eta_1,\eta_2,,\eta_3$不全为零)的“点”$(x_1:x_2:x_3)$组成的集合看成“直线”，并且规定方程

$$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0 \text{ 与 } \mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3=0$$

表示同一条“直线”的充分必要条件是$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$与$(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$成比例，于是“直线”也可由有序三元实数组的非零类$[\eta_1:\eta:\eta_3]$①所完全决定，而且点$(x_1:x_2:x_3)$与直线$[\eta_1:\eta_2:\eta_3]$相关联的充分必要条件是

---

① 为了从书写形式上区别“点”与“直线”，我们把“直线”的非零类记作$[\eta_1:\eta_2:\eta_3]$。

$$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0.$$

则由所有这些“点”和“直线”组成的集合就是一个射影平面，记作 PG(2,$\boldsymbol{R}$)。

**证明** 在 $\pi_0$ 上取定一个仿射标架$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，考虑

$\bar{\pi}_0 \longrightarrow$ PG(2,$\boldsymbol{R}$),

点 $M(x_1,x_2,x_3) \longmapsto$ “点”$(x_1:x_2:x_3)$,

直线 $L$: $\eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3=0 \mapsto$ “直线” $[\eta_1:\eta_2:\eta_3]$。

显然上述对应分别是一一对应，并且若点$M$与直线$L$关联，则有$\eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3=0$，从而“点”$(x_1:x_2:x_3)$与“直线”$[\eta_1:\eta_2:\eta_3]$关联。所以 PG(2,$\boldsymbol{R}$)是一个射影平面。

由定理7.1，我们得到射影平面的又一个具体模型，即，PG(2,$\boldsymbol{R}$)，称它是**解析模型**.解析模型的好处之一是便于将射影平面进行推广。迄今为止，我们讨论的射影平面都是**实射影平面**，但是，如果我们类似地考虑有序三元复数组，则可以得到**复射影平面**，记作 PG(2,$\boldsymbol{C}$)；如果我们考虑有序四元实数组，则可以得到**三维实射影空间** PG(3, $\boldsymbol{R}$)；如果考虑有序 $n+1$ 元实数组，则可以得到 $n$ **维实射影空间** PG($n$,$\boldsymbol{R}$)。

*如果我们考虑有序三元组，其中的元素取 0 或 1，规定：

$0+0=0$，$0+1=1$，$1+1=0$，$0\times1=0$，$0\times0=0$，$1\times1=1$，

并且规定加法和乘法都适合交换律、结合律以及分配律，则从这种有序三元组出发可以得到2阶**有限射影平面**，记作 PG(2,2)，它只有 7 个“点”，7 条“直线”。每条“直线”上有 3 个“点”，每个“点”位于三条“直线”上，可以用图7.5 形象地表现出 PG(2,2)上的“点”、“直线”以及它们之间的关联关系。其中编号为1,2,3,4,5,6,7的“点”分别是：(1:0:0)，(1:1:0)，(1:0:1)，(0:1:0)，(0:1:1)，(1:1:1)，(0:0:1)。编号为1,2,4的“点”所在的“直线”的方程为 $x_3=0$；“直线” 137

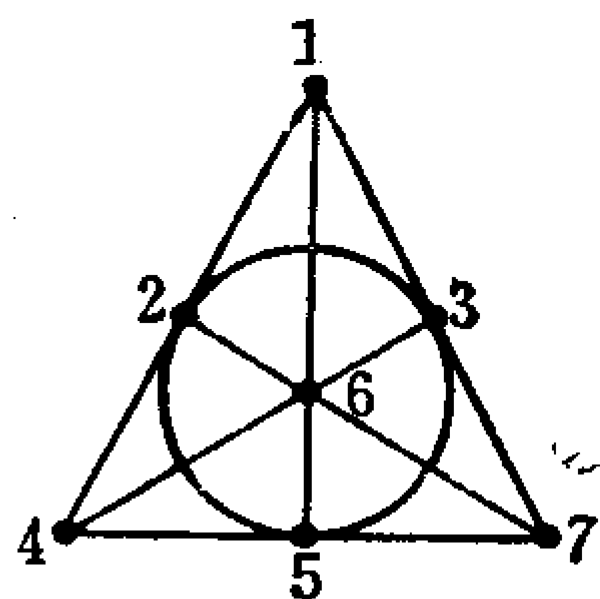


图 7.5

的方程为 $x_2=0$；“直线”457 的方程为 $x_1=0$；“直线”165的方程为 $x_2+x_3=0$；“直线”463 的方程为 $x_1+x_3=0$；“直线”762 的方程为 $x_1+x_2=0$；“直线”235的方程为

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

以后我们只讨论实射影平面，仍简称为射影平面。

## 习 题 7.1

1. 设扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 上两点 $A,B$ 的齐次坐标分别是 $(3,-1,2),(2,0,1)$，求：

(1) 直线 $AB$ 在齐次坐标中的普通方程和参数方程；

(2) 直线 $AB$ 上的无穷远点的齐次坐标和它所对应的参数值。

2. 证明扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 上的下列三条直线共点，并且求该点的齐次坐标。

$$x_1+x_2=0,\ 2x_1-x_2+3x_3=0,\ 5x_1+2x_2+3x_3=0.$$

3. 在扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 上，给出了 $\pi_0$ 的欧氏直线在仿射坐标中的方程，求由它确定的射影直线在齐次坐标中的方程，并且求出它上面的无穷远点。

(1) $x+2y-1=0$； (2) $x=0$；

(3) $y=1$； (4) $3x-2y=0$.

4. 在 PG$(2,\boldsymbol{R})$上，设直线 $L_1,L_2,L_3,L_4$ 的方程依次是：

$$x_1-x_3=0,\ x_2+x_3=0,\ 2x_1+x_2-x_3=0,\ x_1+x_2+2x_3=0,$$

设 $L_1$ 与 $L_2$ 的交点为 $A$，$L_3$ 与 $L_4$ 的交点为 $B$，求直线$AB$ 的方程。

5. 取一个球面，用过球心的一个平面 $\pi$ 截它，取其中一个半球面，把这个半球面上的每个点垂直投影到截面 $\pi$ 上，得到一个圆盘．若投影点在圆盘内部，则这个投影点就看成一个“点”，若投影点在圆盘的边界圆上，则把圆的直径的两个端点看成一个“点”；半球面上的大半圆的投影点组成的半椭圆或直径看成“直

线”．证明这样的圆盘是一个实射影平面．

## §2 射影平面上的对偶原理

从上一节我们已初步看到，射影平面上点和直线的地位是对称的，本节我们来进一步讨论这个问题．

设 $\varphi$(点，线)是关于射影平面上一些点和一些直线的关联关系的一个命题，那么，把此命题中的点都改写成线，把线都改写成点，并且保持关联关系不变以及其它一切表述不变，则得到的命题 $\varphi$(线，点)称为原命题 $\varphi$(点，线)的**对偶命题**．下面我们列举一些命题和它的对偶命题．

| 原命题 | 对偶命题 |
| --- | --- |
| (1) 射影平面上三点共线的充分必要条件是它们的齐次坐标组成的三阶行列式等于零． | (1)′ 射影平面上三线共点的充分必要条件是它们的齐次坐标组成的三阶行列式等于零． |
| (2) 射影平面上若三点 $P_1P_2, P_3$ 不共线，则三线 $P_1P_2$, $P_2P_3, P_3P_1$ 不共点． | (2)′ 射影平面上若三线 $p_1, p_2, p_3$ 不共点，则三点 $p_1p_2$ ①，$p_2p_3, p_3p_1$ 不共线． |
| (3) 德沙格(Desargues)定理：射影平面上，如果两个三角形的对应顶点的连线共点，那么它们的对应边的交点共线． | (3)′ 德沙格定理的逆定理：射影平面上，如果两个三角形的对应边的交点共线，那么它们的对应顶点的连线共点． |
| (4) 直线(看成点列)的点方程是三元一次齐次方程． | (4)′ 点(看成线束)的线方程是三元一次齐次方程． |

① 用 $p_1p_2$ 表示直线 $p_1$ 与 $p_2$ 的交点，其余同理．

射影平面上的每一个命题 $\varphi$(点,线)与它的对偶命题 $\varphi$(线,点)有下述重要的性质，即

**射影平面上的对偶原理** 射影平面上，如果一个命题$\varphi$(点，线)可以证明是一条定理，则它的对偶命题$\varphi$(线，点)也可以证明是一条定理。

**证明** 在平面上取一坐标系，把命题$\varphi$(点,线)的证明用齐次坐标写出来。在这个证明中，把点的齐次坐标都看作线的齐次坐标，把线的齐次坐标都看作点的齐次坐标，所有的表示关联关系的方程没有任何改变，仍然成立，但最后的结论变成$\varphi$(线,点)，于是，就得到了命题$\varphi$(线，点)的证明。

根据射影平面上的对偶原理，我们只要证明了一个命题$\varphi$(点，线)成立，那末它的对偶命题$\varphi$(线，点)就必然成立。譬如，我们已经证明过上述表中的命题(1)成立，于是我们肯定它的对偶命题(1)′也成立。下面我们来证明德沙格定理成立，从而它的逆定理(对偶命题)也必然成立。

**德沙格(Desargues)定理** 射影平面上，如果两个三角形的对应顶点的连线共点，那末它们的对应边的交点共线。

**证明** 设三角形$ABC$与三角形$A'B'C'$的对应顶点的连线$AA'$,$BB'$,$CC'$相交于一点$D$。

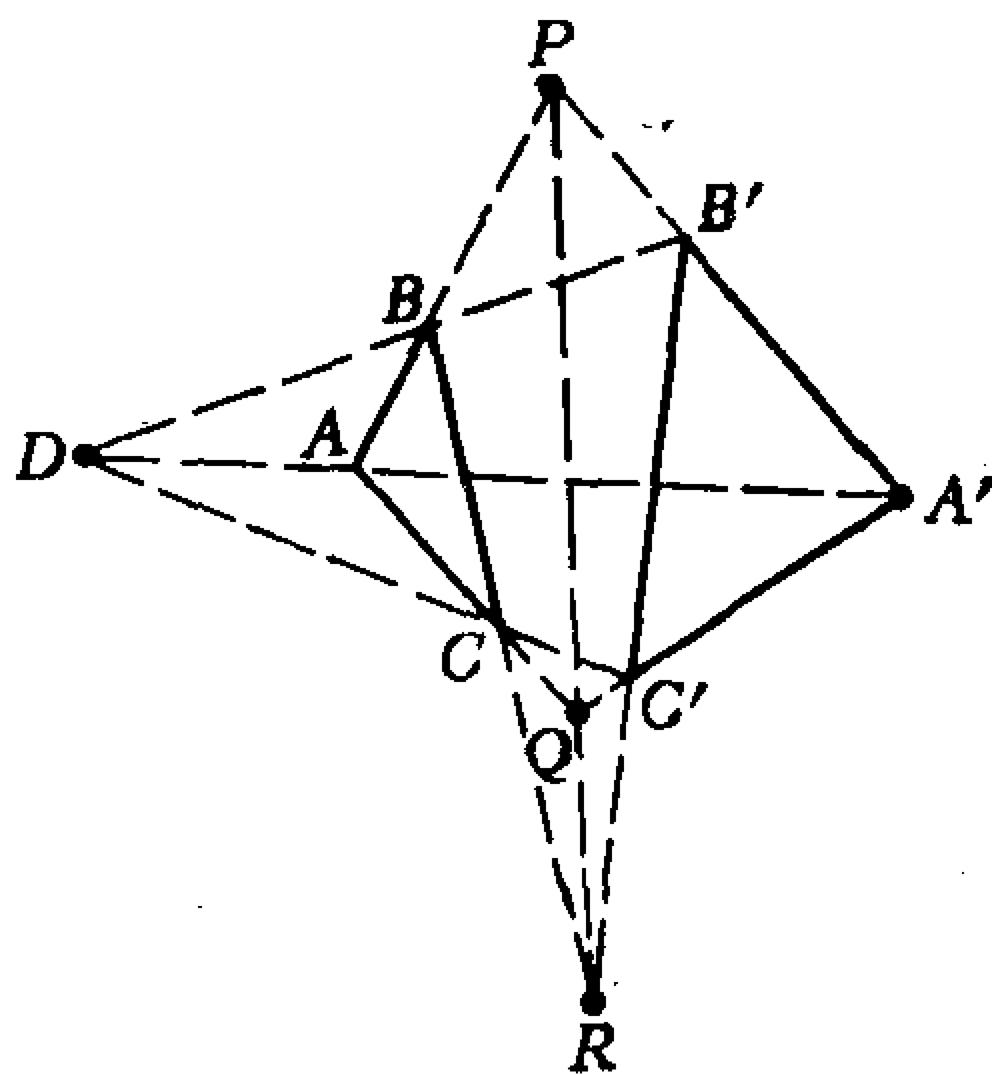


图 7.6

情形1. 如果$A$与$A'$重合，则$AB$与$AB'$交于$A(A')$,$AC$与$AC'$交于$A(A')$。设$BC$与$B'C'$交于$R$，则显然$A,A,R$共线。

同理，如果$B$与$B'$重合，或者$C$与$C'$重合，则结论显然成立。

情形2. 任一组对应顶点不重合。在射影平面上取定一个坐标系，设各点的齐次坐标分别为：$A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$，

$C(c_1,c_2,c_3)$，$A'(a'_1,a'_2,a'_3)$，$B'(b'_1,b'_2,b'_3)$，$C'(c'_1,c'_2,c'_3)$，$D(d_1,d_2,d_3)$。

根据直线的参数方程可知，因为$D$点在直线$AA'$上，所以有不全为零的实数$\lambda,\lambda'$使得

$$\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda'\begin{pmatrix}a'_1\\a'_2\\a'_3\end{pmatrix}.$$

同理，有不全为零的实数$\mu,\mu'$和$\nu,\nu'$，使得

$$d_i=\mu b_i+\mu' b'_i,\qquad i=1,2,3;$$

$$d_i=\nu c_i+\nu' c'_i,\qquad i=1,2,3.$$

于是得

$$\lambda a_i+\lambda' a'_i=\mu b_i+\mu' b'_i=\nu c_i+\nu' c'_i,\qquad i=1,2,3. \quad (7.3)$$

从而有

$$\lambda a_i-\mu b_i=-\lambda' a'_i+\mu' b'_i=:p_i,\quad i=1,2,3. \quad (7.4)$$

由(7.4)看出，齐次坐标为$(p_1,p_2,p_3)$的点$P$既在直线$AB$上，又在直线$A'B'$上，因此$P$是$AB$和$A'B'$的交点。

类似地，由(7.3)可得

$$-\lambda a_i+\nu c_i=\lambda' a'_i-\nu' c'_i=:q_i,\qquad i=1,2,3; \quad (7.5)$$

$$\mu b_i-\nu c_i=-\mu' b'_i+\nu' c'_i=:r_i,\qquad i=1,2,3. \quad (7.6)$$

从(7.5),(7.6)分别看出，齐次坐标为$(q_1,q_2,q_3)$的点$Q$是$AC$与$A'C'$的交点；齐次坐标为$(r_1,r_2,r_3)$的点$R$是$BC$与$B'C'$的交点。从(7.4),(7.5),(7.6)可得

$$p_i+q_i+r_i=0,\qquad i=1,2,3.$$

即

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix},$$

所以$P,Q,R$三点共线。

## 习 题 7.2

1. 证明：射影平面上若三点$P_1, P_2, P_3$不共线，则三线$P_1P_2$，$P_2P_3, P_3P_1$不共点。

2. 设命题$\varphi$(点，线)为：在射影平面上，$A, B, C$和$A'$，$B', C'$分别是直线$l_1$和$l_2$上的三个点，并且均与$l_1$和$l_2$的交点$D$不重合；设$AB'$与$A'B$交于点$P$，$BC'$与$B'C$交于点$Q$，$CA'$与$C'A$交于点$R$，则$P, Q, R$三点共线。试写出这个命题的对偶命题$\varphi$(线，点)。

3. 设射影平面上直线$l_i$的齐次坐标为$(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3})$，$i=1, 2, 3$，并且$l_1 \neq l_2$。证明：$l_1, l_2, l_3$共点的充分必要条件为存在不全为零的实数$\lambda$和$\mu$使得

$$\eta_{3j} = \lambda\eta_{1j} + \mu\eta_{2j}, \quad j=1,2,3.$$

*4. 设$M$是欧氏平面$\pi_0$上一点，$l_1$和$l_2$是$\pi_0$上两条直线，它们相交于一个不可到达的点$N$（非常远或者被物体阻隔），试用直尺作经过点$M$和$N$的直线。

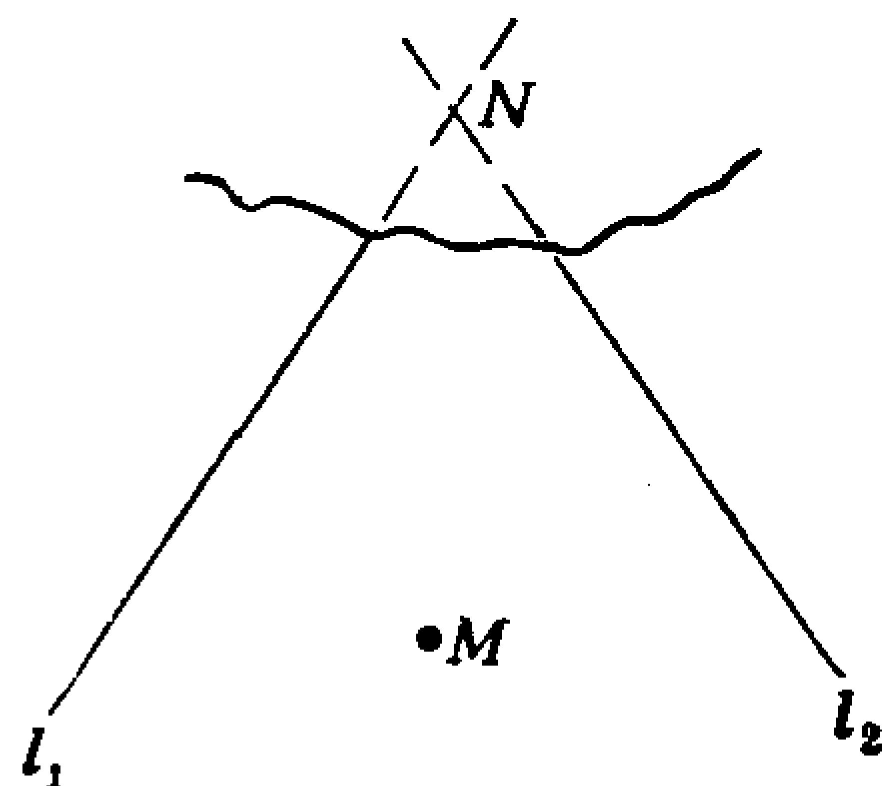



图 7.7

## §3 交 比

我们知道，在中心投影下线段的分比（即共线三点的简单比值）是会改变的，本节讨论射影平面上共线四点的**交比**，它经过中心投影后保持不变。

### 3.1 交比的定义和性质

设$A, B, C$是射影平面$\pi_0$上共线的三点，$A, B$为通常点，$C \neq B$。首先我们将第六章§3定义的共线三点的简单比值$(A, B, C)$推广到$C$可以为无穷远点的情形，即

$$(A,B,C)=\frac{AC}{CB},\tag{7.7}$$

当 $C$ 为无穷远点时，规定 $(A,B,C)=-1$。然后我们来定义 $\pi_0$ 上共线四点的交比。

**定义7.6** 设 $A,B,C,D$ 为射影平面 $\pi_0$ 上共线的四点，$A$，$B$ 为通常点，$A\neq B$，$C\neq B$，$D\neq A,B$。我们将 $(A,B,C)$ 与 $(A,B,D)$ 的比值称为 $A,B,C,D$ 的**交比**，记作 $(A,B;C,D)$。即

$$(A,B;C,D):=\frac{(A,B,C)}{(A,B,D)}=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}\cdot\frac{DB}{AD}.\tag{7.8}$$

若 $A,B,C$ 各不相同，则规定：当 $D=B$ 时，$(A,B;C,D)=0$。

有时也把交比称为二重比。

我们也可以给射影平面上共点的四线规定它们的交比。设 $l_1$，$l_2,l_3,l_4$ 是通过点 O 的四条直线，$l_1\neq l_2$。任取一条不过 O 的直线 $l$，设 $l$ 与 $l_i$ 相交于 $A_i(i=1,2,3,4)$，如果 $(A_1,A_2;A_3,A_4)$ 有定义，我们就规定共点四线 $l_1,l_2,l_3,l_4$ 的交比为：

$$(l_1,l_2;l_3,l_4):=(A_1,A_2;A_3,A_4).\tag{7.9}$$

但是要证明这个定义是有意义的，即，这样定义的交比与截线 $l$ 的选取无关。为此在 $\pi_0$ 上取定一个仿射标架 $[O;e_1,e_2]$，设直线 $l_i$ 的齐次坐标为 $(\eta_{i1},\eta_{i2},\eta_{i3})$，点 $A_i$ 的齐次坐标为 $(a_{i1},a_{i2},a_{i3})$，$i=1,2,3,4$。因为 $l_1\neq l_2$，根据三线共点的条件（见习题7.2第3题），得

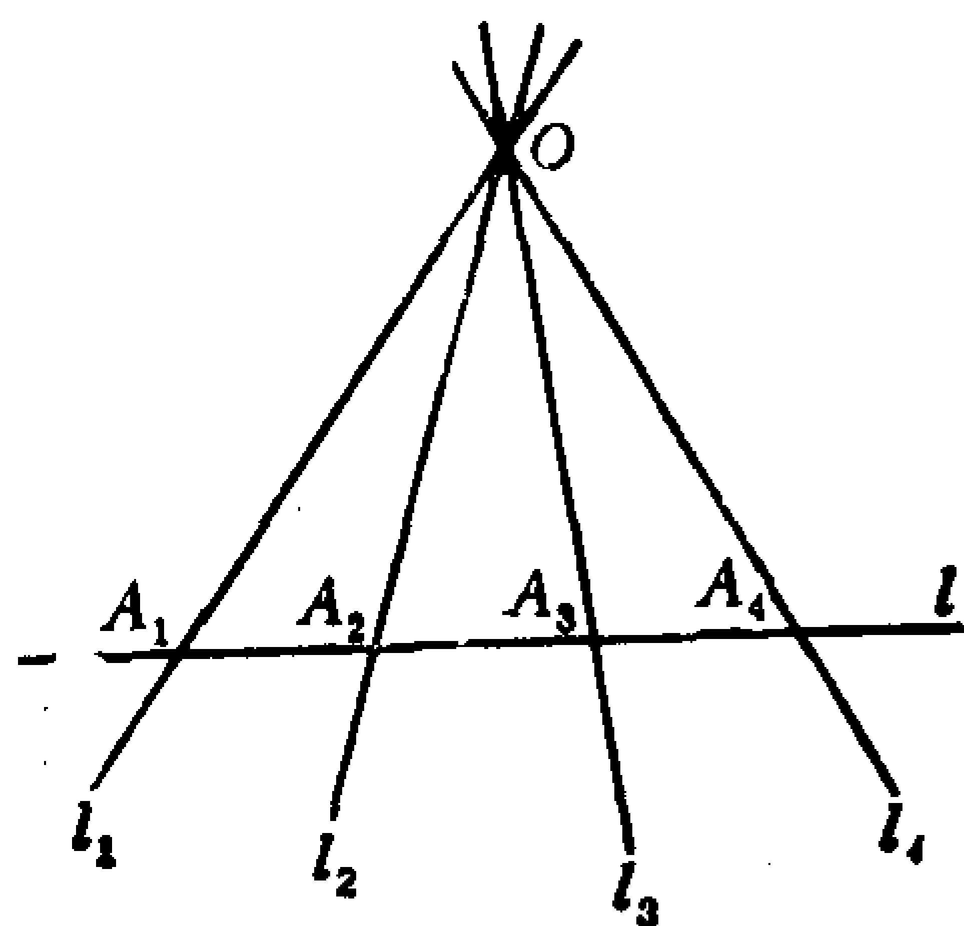



图 7.8

$$\eta_{3j}=\lambda_1\eta_{1j}+\mu_1\eta_{2j},$$
$$\eta_{4j}=\lambda_2\eta_{1j}+\mu_2\eta_{2j},\qquad j=1,2,3.$$

又根据在仿射坐标系中，若点$M_1(x_1,y_1)$与$M_2(x_2,y_2)$的连线与直线$Ax+By+C=0$的交点为$M$，则

$$\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C},$$

因此，我们得到

$$\frac{A_1A_3}{A_3A_2}=-\frac{\eta_{31}\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{13}}+\eta_{32}\dfrac{a_{12}}{a_{13}}+\eta_{33}}{\eta_{31}\dfrac{a_{21}}{a_{23}}+\eta_{32}\dfrac{a_{22}}{a_{23}}+\eta_{33}}$$

$$=-\frac{\mu_1\left(\eta_{21}\dfrac{a_{11}}{a_{13}}+\eta_{22}\dfrac{a_{12}}{a_{13}}+\eta_{23}\right)}{\lambda_1\left(\eta_{11}\dfrac{a_{21}}{a_{23}}+\eta_{12}\dfrac{a_{22}}{a_{23}}+\eta_{13}\right)},$$

$$\frac{A_1A_4}{A_4A_2}=-\frac{\mu_2\left(\eta_{21}\dfrac{a_{11}}{a_{13}}+\eta_{22}\dfrac{a_{12}}{a_{13}}+\eta_{23}\right)}{\lambda_2\left(\eta_{11}\dfrac{a_{21}}{a_{23}}+\eta_{12}\dfrac{a_{22}}{a_{23}}+\eta_{13}\right)},$$

于是有

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=(A_1,A_2;A_3,A_4)=\frac{A_1A_3}{A_3A_2}:\frac{A_1A_4}{A_4A_2}$$

$$=\frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1\mu_2}=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1}{\mu_1}. \tag{7.10}$$

由此可见，这样定义的共点四线的交比只与这四条直线的相互位置有关，而与截线$l$的选取无关。

设$[P]$为一点列，$O$为$[P]$外一点，则$P\longleftrightarrow OP$是点列$[P]$和线束$[OP]$之间的一一对应，并且把线束$[OP]$称为点列$[P]$在$O$上的**射影**(或$[P]$以$O$为中心的射影)，把点列$[P]$称为$O$在$[P]$上的**截影**。

根据上面共点四线的交比的定义不难看出：交比在上述射影和截影下保持不变。由此可以推广前面所述的交比的定义，免除前面定义交比时所加上的某些元素不能是无穷远元素的限制。共线四点 $A,B,C,D$，若 $A,B,C$ 各不相同，并且 $D\neq A$，则可以把它们的交比 $(A,B;C,D)$ 规定为它们在某个点 $O$ 上的射影 $OA$, $OB,OC,OD$ 的交比；共点四线 $l_1,l_2,l_3,l_4$，若 $l_1,l_2,l_3$ 各不相同，并且 $l_4\neq l_1$，则可以把它们的交比 $(l_1,l_2;l_3,l_4)$ 规定为它们在某条直线 $l$ 上的截影 $P_1,P_2,P_3,P_4$ 的交比。这样规定的交比仍然包含前面的定义作为特例，并且具有性质：交比在上述射影和截影下保持不变。这样一来，我们在讨论交比的性质时，总可以假设它们是共线的四个通常点的交比，这是因为共线的四个点如果它们中间有无穷远点，我们总可以经过射影和截影把它们变成共线的四个通常点(见图7.9)。

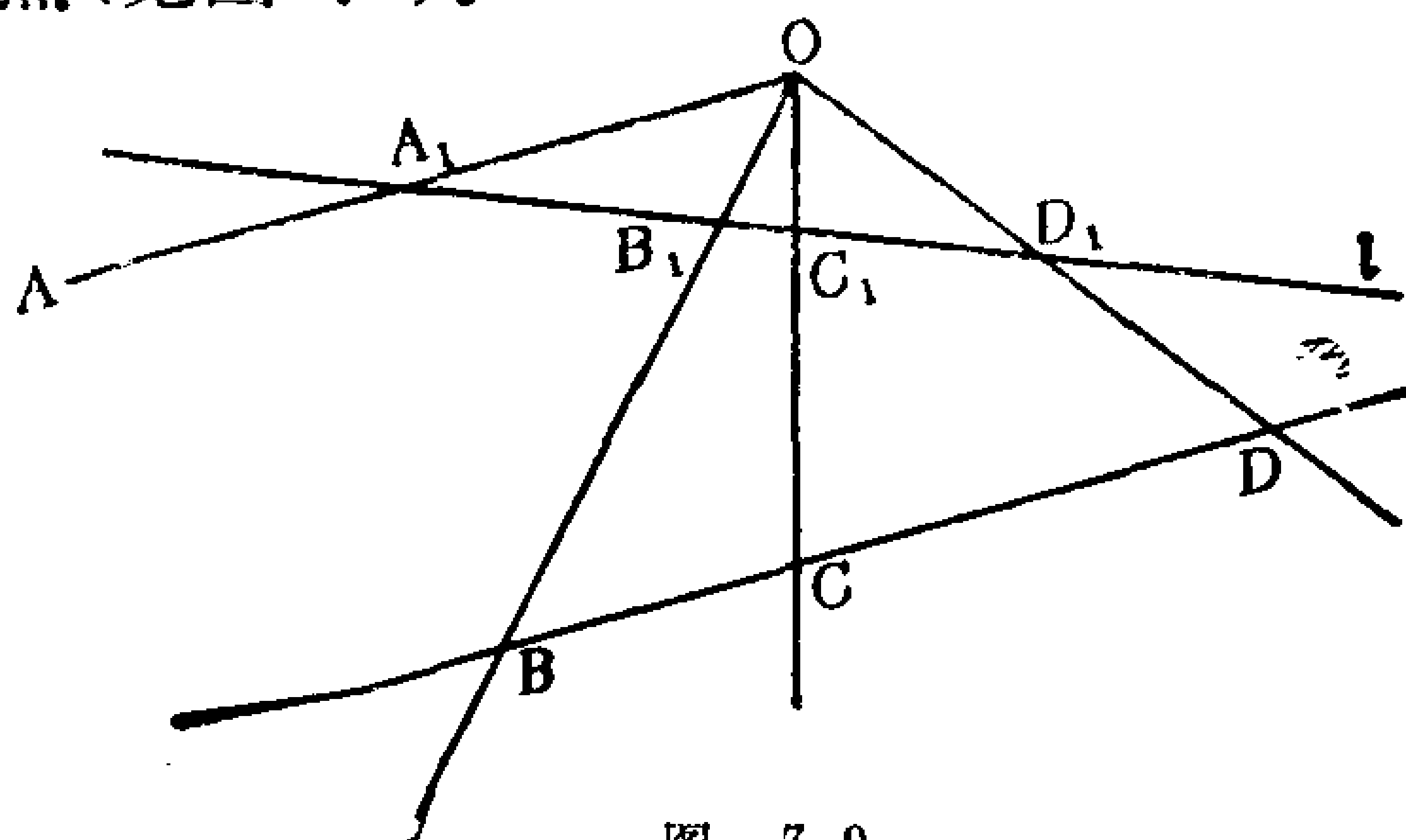



图 7.9

由于交比在射影和截影下保持不变，因此交比在中心投影下保持不变。

我们已经会用直线的齐次坐标计算共点四线的交比(见公式(7.10))，现在我们来讨论如何用点的齐次坐标计算共线四点的交比。

**定理7.2** 设射影平面 $\pi_0$ 上的共线四点 $A,B,C,D$，其中 $A$, $B,C$ 各不相同，并且 $D\neq A$。设 $A,B,C,D$ 的齐次坐标分别为

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3),$$

并且

$$c_i=\lambda_1 a_i+\mu_1 b_i,\quad d_i=\lambda_2 a_i+\mu_2 b_i,\quad i=1,2,3,$$

则

$$(A,B;C,D)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\bigg/\frac{\lambda_1}{\mu_1}. \tag{7.11}$$

**证明** 在直线 $AB$ 外任取一点 $P$，设它的齐次坐标为 $(p_1,p_2,p_3)$。则连线 $PA,PB,PC,PD$ 的齐次坐标依次为：

$$\left(\begin{vmatrix}p_2 & a_2\\ p_3 & a_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}p_1 & a_1\\ p_3 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}p_1 & a_1\\ p_2 & a_2\end{vmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{vmatrix}p_2 & b_2\\ p_3 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}p_1 & b_1\\ p_3 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}p_1 & b_1\\ p_2 & b_2\end{vmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{vmatrix}p_2 & \lambda_1 a_2+\mu_1 b_2\\ p_3 & \lambda_1 a_3+\mu_1 b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}p_1 & \lambda_1 a_1+\mu_1 b_1\\ p_3 & \lambda_1 a_3+\mu_1 b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}p_1 & \lambda_1 a_1+\mu_1 b_1\\ p_2 & \lambda_1 a_2+\mu_1 b_2\end{vmatrix}\right),$$

$$\left(\begin{vmatrix}p_2 & \lambda_2 a_2+\mu_2 b_2\\ p_3 & \lambda_2 a_3+\mu_2 b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}p_1 & \lambda_2 a_1+\mu_2 b_1\\ p_3 & \lambda_2 a_3+\mu_2 b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}p_1 & \lambda_2 a_1+\mu_2 b_1\\ p_2 & \lambda_2 a_2+\mu_2 b_2\end{vmatrix}\right).$$

显然有

$$\begin{vmatrix}p_2 & \lambda_1 a_2+\mu_1 b_2\\ p_3 & \lambda_1 a_3+\mu_1 b_3\end{vmatrix}=\lambda_1\begin{vmatrix}p_2 & a_2\\ p_3 & a_3\end{vmatrix}+\mu_1\begin{vmatrix}p_2 & b_2\\ p_3 & b_3\end{vmatrix},$$

等等，于是由(7.10)得

$$(A,B;C,D)=(PA,PB;PC,PD)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\bigg/\frac{\lambda_1}{\mu_1}.$$

共线四点的交比还可以通过另一种形式来计算。

**定理7.3** 设 $A,B,C,D$ 是射影平面 $\pi_0$ 上的共线四点，其中 $A,B,C$ 各不相同，并且 $D\neq A$。在此直线上取两点 $P,Q$，它们的齐次坐标分别为

$$(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3);$$

$A,B,C,D$ 的齐次坐标分别为

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3),$$

并且设

$$a_i=\lambda_1 p_i+\mu_1 q_i,\quad b_i=\lambda_2 p_i+\mu_2 q_i,\quad c_i=\lambda_3 p_i+\mu_3 q_i,\quad d_i=\lambda_4 p_i+\mu_4 q_i,\qquad i=1,2,3;$$

则

$$(A,B;C,D)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \mu_2 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix}}. \tag{7.12}$$

**证明** 因为点$A$与$B$不同，所以$(\lambda_1,\mu_1)$与$(\lambda_2,\mu_2)$不成比例，从而

$$d=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

由已知，$a_i=\lambda_1 p_i+\mu_1 q_i$，$b_i=\lambda_2 p_i+\mu_2 q_i$，所以

$$p_i=\frac{1}{d}\begin{vmatrix}a_i & \mu_1\\ b_i & \mu_2\end{vmatrix},\quad q_i=\frac{1}{d}\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_i\\ \lambda_2 & b_i\end{vmatrix},\qquad i=1,2,3.$$

从而

$$c_i=\lambda_3 p_i+\mu_3 q_i=\frac{\lambda_3}{d}\begin{vmatrix}a_i & \mu_1\\ b_i & \mu_2\end{vmatrix}+\frac{\mu_3}{d}\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_i\\ \lambda_2 & b_i\end{vmatrix}$$

$$=d^{-1}[(\lambda_3\mu_2-\lambda_2\mu_3)a_i+(\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1)b_i],\quad i=1,2,3.$$

类似地有

$$d_i=d^{-1}[(\lambda_4\mu_2-\lambda_2\mu_4)a_i+(\lambda_1\mu_4-\lambda_4\mu_1)b_i],\quad i=1,2,3.$$

所以

$$(A,B;C,D)=\frac{d^{-1}(\lambda_4\mu_2-\lambda_2\mu_4)}{d^{-1}(\lambda_1\mu_4-\lambda_4\mu_1)}\Big/\frac{d^{-1}(\lambda_3\mu_2-\lambda_2\mu_3)}{d^{-1}(\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1)}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \mu_2 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix}}.$$

从定理7.3不难得出交比的下列性质：

(1) $(C,D;A,B)=(A,B;C,D)=(B,A;D,C)$；

(2) 若$D$与$B$也不同，则有

$$(B,A;C,D)=\frac{1}{(A,B;C,D)}=(A,B;D,C);$$

(3) $(A,C;B,D)=1-(A,B;C,D)$。

不难看出，对于共点四线的交比也有类似于定理7.3的计算公式和上述三条性质。

共点四线的交比还有一条重要性质：设O是$\pi_0$上的通常点，$l_1,l_2,l_3,l_4$是共点于O的四条不同的直线，用$\langle l_i,l_j\rangle$表示直线$l_i$绕O转到$l_j$的角度，则有

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=\frac{\sin\langle l_1,l_3\rangle}{\sin\langle l_3,l_2\rangle}\bigg/\frac{\sin\langle l_1,l_4\rangle}{\sin\langle l_4,l_2\rangle}. \tag{7.13}$$

这个公式的证明留给读者(见习题7.3第8题)。

### 3.2 调和点列与调和线束

交比为$-1$的情形是一种重要的情形。

**定理7.7** 射影平面上共线四点$A,B,C,D$，如果满足$(A,B;C,D)=-1$，则称它们是**调和点列**，其中点$D$称为$A,B,C$的**第四调和点**，并且称点$D$是点$C$关于点偶$A,B$的**调和共轭点**。

由于

$$(A,B;D,C)=\frac{1}{(A,B;C,D)},$$

所以若点$D$是点$C$关于点偶$A,B$的调和共轭点，则点$C$也是点$D$关于点偶$A,B$的调和共轭点，这时称$C,D$关于$A,B$**调和共轭**。

由于$(C,D;A,B)=(A,B;C,D)$，因此如果$C,D$关于$A,B$调和共轭，则$A,B$关于$C,D$调和共轭。此时称点偶$C,D$与点

偶 $A,B$ 彼此**调和分割**。

由交比的定义以及交比在射影和截影下的不变性可以看出，任给共线的三个不同点 $A,B,C$，它们的第四调和点一定存在并且是唯一的。

设 $A,B,C$ 是 $\pi_0$上共线的三个通常点，如果$C$是线段 $AB$ 的中点，则从$(A,B;C,D)=-1$可以推出$D$为直线 $AB$ 上的无穷远点。这说明线段 $AB$ 的中点$C$关于 $A,B$ 调和共轭的点是直线$AB$上的无穷远点，从而直线 $AB$ 上的无穷远点关于 $A,B$ 的调和共轭点是线段 $AB$ 的中点(注：所谓线段 $AB$ 指的是直线 $AB$ 上$A$与$B$之间的不含无穷远点的那一部分)。

类似地，共点四线 $l_1,l_2,l_3,l_4$，如果满足

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=-1,$$

则称 $l_1,l_2,l_3,l_4$是**调和线束**，其中 $l_4$称为 $l_1,l_2,l_3$的**第四调和线**。

同样，任给共点的三条不同的直线，它们的第四调和线存在并且唯一。

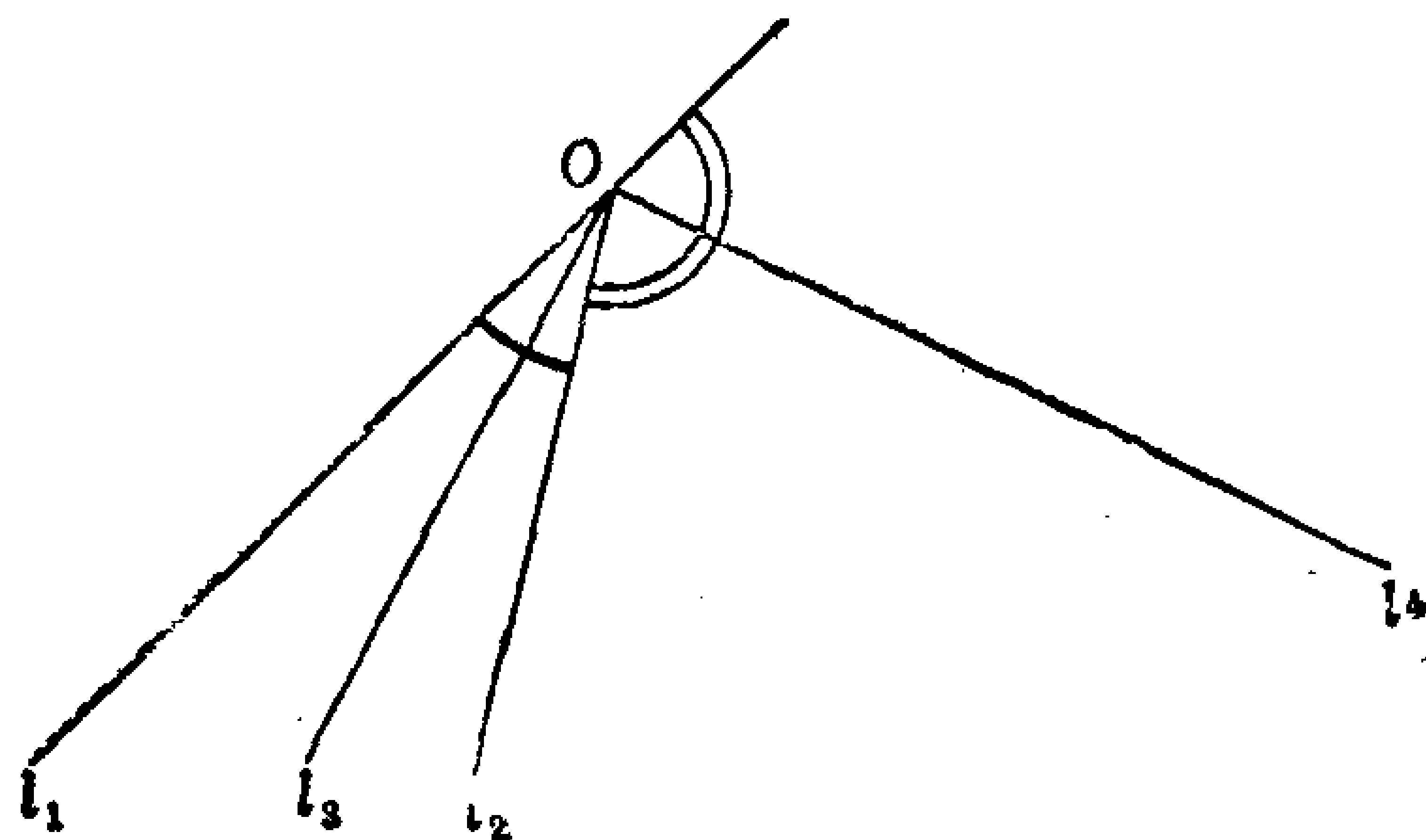



图 7.10

设$O$是$\pi_0$上的通常点，$l_1,l_2,l_3,l_4$是通过点$O$的四条不同的直线，如果$l_3$是$l_1$与$l_2$所夹的一个角的角平分线，并且$(l_1,l_2;l_3,l_4)=-1$，则由公式(7.13)可以得出$l_4$是$l_1$与$l_2$所夹的另一个角的角平分线(见图7.10)。这说明$l_1$与$l_2$所夹的两个角的角平分线关于$l_1,l_2$调和共轭。

任给共线的三个通常点 $A,B,C$，它们的第四调和点可以按下述步骤作出：

在直线 $AB$ 外任取一点$S$，连接 $SA,SB,SC$。在直线 $SC$上

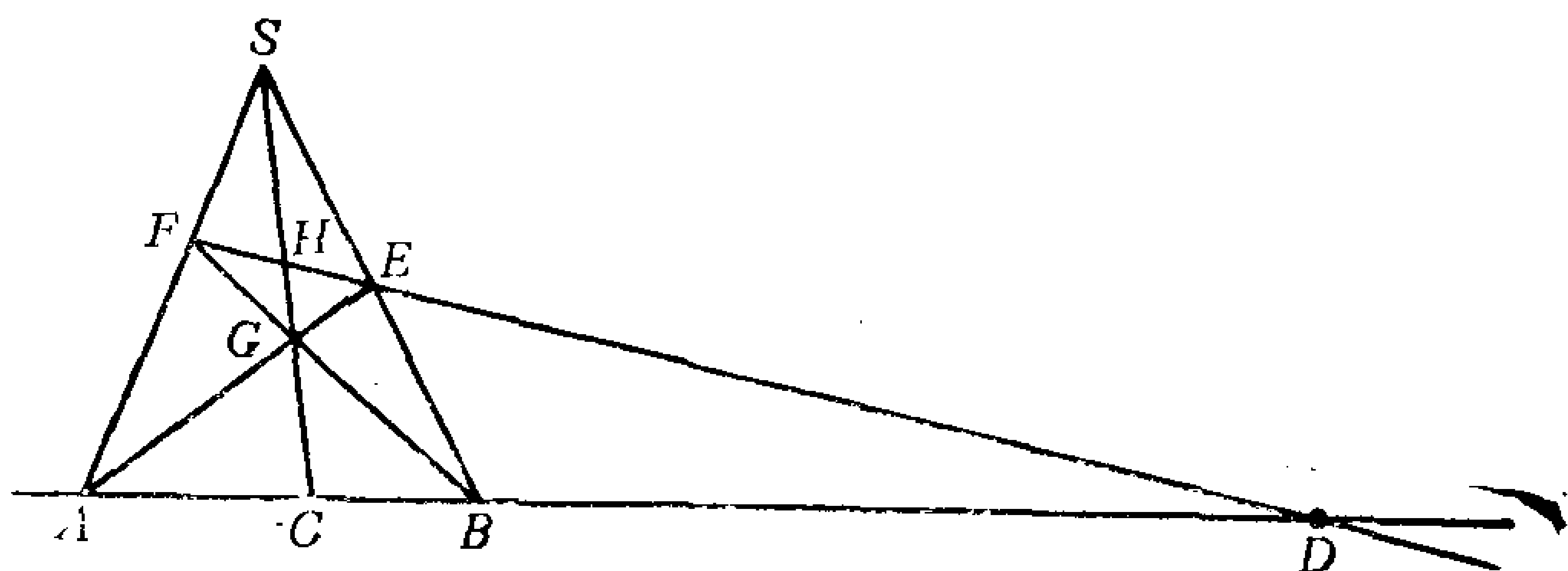


图 7.11

取一点 $G(\neq C,S)$，连接 $AG$，它与 $SB$ 交于 $E$，连接 $BG$，它与 $SA$ 交于 $F$。则 $FE$ 与 $AB$ 的交点 $D$ 就是 $A,B,C$ 的第四调和点。

**证明** 设 $FE$ 与 $SC$ 的交点为 $H$。先后考虑以 $S$ 为中心的线束和以 $G$ 为中心的线束可以得出：

$$(A,B;C,D)=(SA,SB;SC,SD)=(F,E;H,D),$$

$$(F,E;H,D)=(GF,GE;GH,GD)=(B,A;C,D),$$

从而 $(A,B;C,D)=(B,A;C,D)$，再用交比的性质（2），可得到 $(A,B;C,D)^2=1$，假如 $(A,B;C,D)=1$，则得 $(A,C;B,D)=0$，从而 $(A,C,B)=0$，于是 $A=B$，这与已知矛盾。所以必有 $(A,B;C,D)=-1$，从而 $D$ 是 $A,B,C$ 的第四调和点。

## 习 题 7.3

1. 在射影平面 $\pi_0$ 上，设共线三点 $A,B,C$ 的齐次坐标分别为 $(1,2,5),(1,0,3),(-1,2,-1)$，在直线 $AB$ 上求一点 $D$ 使得交比 $(A,B;C,D)=5$。

2. 在射影平面 $\pi_0$ 上，三点 $A,B,C$ 的齐次坐标分别为 $(1,4,1),(0,1,1),(2,3,-3)$，证明 $A,B,C$ 三点共线，并且求此直线上的一点 $D$ 使 $(A,B;C,D)=-4$。

3. 在射影平面 $\pi_0$ 上，给了共线的四个通常点的仿射坐标 $A(2,-4)$，$B(-4,5)$，$C(4,-7)$，$D(0,-1)$，求它们的交比 $(A,B;C,D)$。

4 在射影平面 $\pi_0$ 上，设共点于 $O$ 的三条直线 $l_1,l_2,l_3$ 的齐

次坐标分别为$(-1,0,2),(3,1,-2),(1,1,2)$，求通过O的一条直线$l_4$，使得交比$(l_1,l_2;l_3,l_4)=-3$。

5. 在射影平面$\pi_0$上，五个点$P,A,B,C,D$的齐次坐标分别为$(3,-2,4),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$，求直线$PA,PB,PC,PD$的交比。

6. 设$A,B,C,D,E$是共线的五点，并且两两不同，证明

$$(A,B;C,D)\cdot(A,B;D,E)=(A,B;C,E)。$$

7. 用交比$(A,B;C,D)$表达这些点按任何其它顺序所取的交比。

8. 设O是$\pi_0$上的通常点，$l_1,l_2,l_3,l_4$是共点于O的四条不同的直线，用$\langle l_i,l_j\rangle$表示直线$l_i$绕O逆时针转到$l_j$的角度。证明：

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=\frac{\sin\langle l_1,l_3\rangle}{\sin\langle l_3,l_2\rangle}\bigg/\frac{\sin\langle l_1,l_4\rangle}{\sin\langle l_4,l_2\rangle}.$$

9. 若$l_1,l_2,l_3,l_4$是$\pi_0$上的调和线束，并且$l_3$与$l_4$互相垂直，证明：$l_3$是$l_1$与$l_2$的夹角的角平分线。

10. 证明：在欧氏平面$\pi_0$上，已给一个圆上任意四个不同的固定点$A_1,A_2,A_3,A_4$，则它们到圆上任意第五点$P$的联线的交比$(PA_1,PA_2;PA_3,PA_4)$是常数，与$P$在圆上的位置无关。

## §4 射影坐标和射影坐标变换

### 4.1 点的射影坐标

在§1里我们在扩大的欧氏平面$\pi_0$上定义点的齐次坐标时，用了欧氏平面$\pi_0$上的仿射标架$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$。我们自然希望能够直接用射影平面$\pi_0$上的元素（“点”）作为标架，也就是说，要在射影平面$\pi_0$上建立射影坐标系。

为了回答上述问题，我们先从把O这个模型来看，上述问题就变成：能不能用把O里的直线（这就是“点”）作为标架建立射

影坐标系？我们已经知道，把O里的直线 $l$ 完全被它的方向向量所决定，但是方向向量可以相差一个非零倍数。基于这一事实，我们分两步来回答上述问题。

首先，我们仍然先在把O中取一个仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，这时把O中的每一条直线 $l$ 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 在这个仿射标架下就有仿射坐标 $(x_1,x_2,x_3)$，我们自然会想到就可以将 $(x_1,x_2,x_3)$ 称为直线 $l$ 的坐标，这种坐标可以相差一个非零倍数。这说明只要在把O中取定一个仿射标架，那末把O中的每条直线就都有了坐标。但是我们的目的是要以把O中的直线作为标架，因此我们要进一步分析：在把O中取定一个仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 后可以确定把O中的几条直线？显然 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 分别确定了把O中的三条直线 $l_1,l_2,l_3$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 就是 $l_i$ 的方向向量，于是 $l_1$ 的坐标是 $(1,0,0)$，$l_2$ 的坐标是 $(0,1,0)$，$l_3$ 的坐标是 $(0,0,1)$。这三条直线 $l_1,l_2,l_3$ 称为把O中的**基本直线**(即坐标分别为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 的直线)。此外，若令 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，则 $\boldsymbol{e}$ 也确定了把O中的一条直线 $l_4$，它的坐标是 $(1,1,1)$，这条直线 $l_4$ 称为把O中的**单位直线**(即坐标为 $(1,1,1)$ 的直线)。由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}$ 中任意三个向量都不共面，因此 $l_1,l_2,l_3,l_4$ 中任意三条直线都不共面，这样的四条直线称为把O中**一般位置的四条直线**。上述说明：把O中取定一个仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 后，就确定了把O中的一般位置的四条直线 $l_1,l_2,l_3,l_4$，前三条是基本直线，第四条是单位直线。

其次，我们容易想到把上述三条基本直线 $l_1,l_2,l_3$ 和单位直线 $l_4$ 合在一起作为把O中的射影标架，但是在这样做之前，还要说明一件事，即如果我们在单位直线 $l_4$ 上取另一个方向向量 $\boldsymbol{e}'$，并且在基本直线 $l_i$ 上取方向向量 $\boldsymbol{e}'_i$ 使得 $\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{e}'_1+\boldsymbol{e}'_2+\boldsymbol{e}'_3$，那末我们又得到把O的一个仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$，于是把O中每一条直线 $l$ 在这个仿射标架下也有坐标 $(x'_1,x'_2,x'_3)$，这是 $l$ 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 在 $[O;\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$ 中的坐标。而且对于这个仿射标架，$l_1,l_2,l_3,l_4$ 的坐标分别为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$。因

此对于这个仿射标架，$l_1,l_2,l_3$仍是基本直线，$l_4$仍是单位直线。既然对于三条基本直线和一条单位直线可以得到不同的仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和$[O;\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$，那末我们必须说明把O中每一条直线$l$的方向向量$\boldsymbol{v}$分别在这两个仿射标架下的坐标$(x_1,x_2,x_3)$和$(x'_1,x'_2,x'_3)$是成比例的，这样才能把上述三条基本直线和一条单位直线合在一起作为把O中的射影标架。现在就来说明$(x_1,x_2,x_3)$和$(x'_1,x'_2,x'_3)$为什么是成比例的：因为$\boldsymbol{e}'$和$\boldsymbol{e}$都是$l_4$的方向向量，所以可设$\boldsymbol{e}'=\lambda\boldsymbol{e}$。同理可设$\boldsymbol{e}'_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$，$i=1,2,3$。于是

$$\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{e}'_1+\boldsymbol{e}'_2+\boldsymbol{e}'_3=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3,$$

又有$\boldsymbol{e}'=\lambda\boldsymbol{e}=\lambda(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$，因此，

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3=\lambda\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_3,$$

从而得$\lambda_i=\lambda$，$i=1,2,3$。所以，

$$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}x'_i\boldsymbol{e}'_i=\sum_{i=1}^{3}x'_i\lambda\boldsymbol{e}_i,$$

由此得出，$x_i=\lambda x'_i$，$i=1,2,3$。

综上述，我们可以给出下述定义。

**定义7.8** 设$l_1,l_2,l_3,l_4$是把O中一般位置的四条直线，在$l_4$上取一个方向向量$\boldsymbol{e}$，然后在$l_i$上取方向向量$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$使得$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$(见图7.12)。称$l_1,l_2,l_3$是**基本直线**，称$l_4$是**单位直线**，称$[l_1,l_2,l_3,l_4]$是把O的一组**基底**(或一个**射影标架**)；把O中每一条直线$l$的方向向量$\boldsymbol{v}$在仿射标架$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$下的坐标$(x_1,x_2,x_3)$称为$l$在基底$[l_1,l_2,l_3,l_4]$中的**齐次射影坐标**，简称为**射影坐标**。

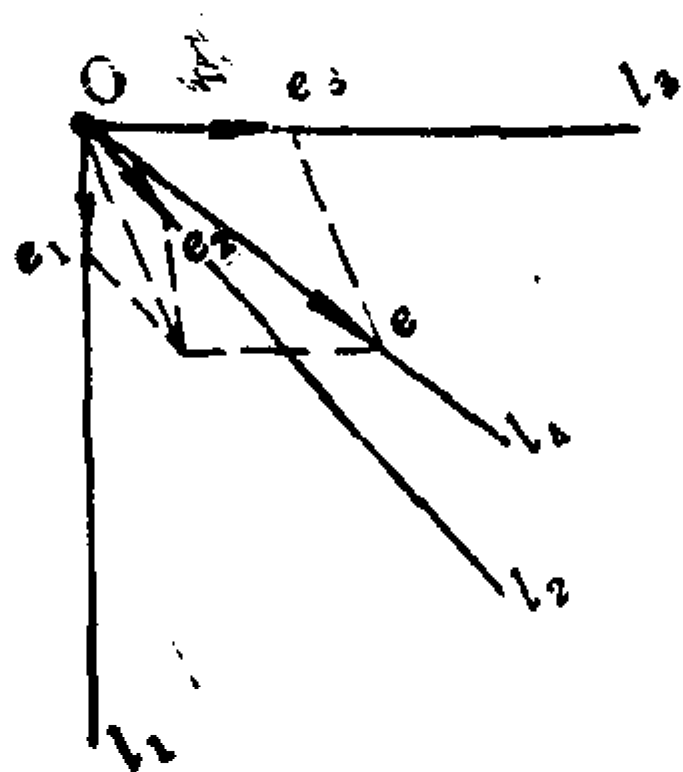


图 7.12

显然把O中的直线$l$在基底$[l_1,l_2,l_3,l_4]$中的齐次射影坐标不唯一，但它们成比例。不同直线在同一基底中的齐次射影坐标不成比例。基本直线$l_1,l_2,l_3$的齐次射影坐标分别为$(1,0,0)$，

(0,1,0),(0,0,1)；单位直线 $l_4$的齐次射影坐标为(1,1,1)。

现在来看扩大的欧氏平面 $\pi_0$上如何引进射影坐标系。

在欧氏平面 $\pi_0$外取一点 $O$，于是扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 上的点和直线分别与把 $O$ 的直线和平面有一个一一对应。显然，把 $O$ 中一般位置的四条直线对应于 $\pi_0$上一般位置的四个点(即，其中任意三点不共线)。于是容易想到下述定义。

**定义7.9** 在扩大的欧氏平面 $\pi_0$ 上取定一般位置的四个点 $A_1,A_2,A_3,E$，在 $\pi_0$外取一点 $O$。对于 $\pi_0$上的每一个点 $M$，我们将直线 $OM$ 在把 $O$ 的基底 $[OA_1,OA_2,OA_3,OE]$ 中的齐次射影坐标 $(x_1,x_2,x_3)$ 称为点 $M$ 在 $\pi_0$的**基底** $[A_1,A_2,A_3,E]$ 中的**齐次射影坐标**，简称为**射影坐标**。基底 $[A_1,A_2,A_3,E]$ 中的前三个点称为**基本点**，第四个点称为**单位点**。

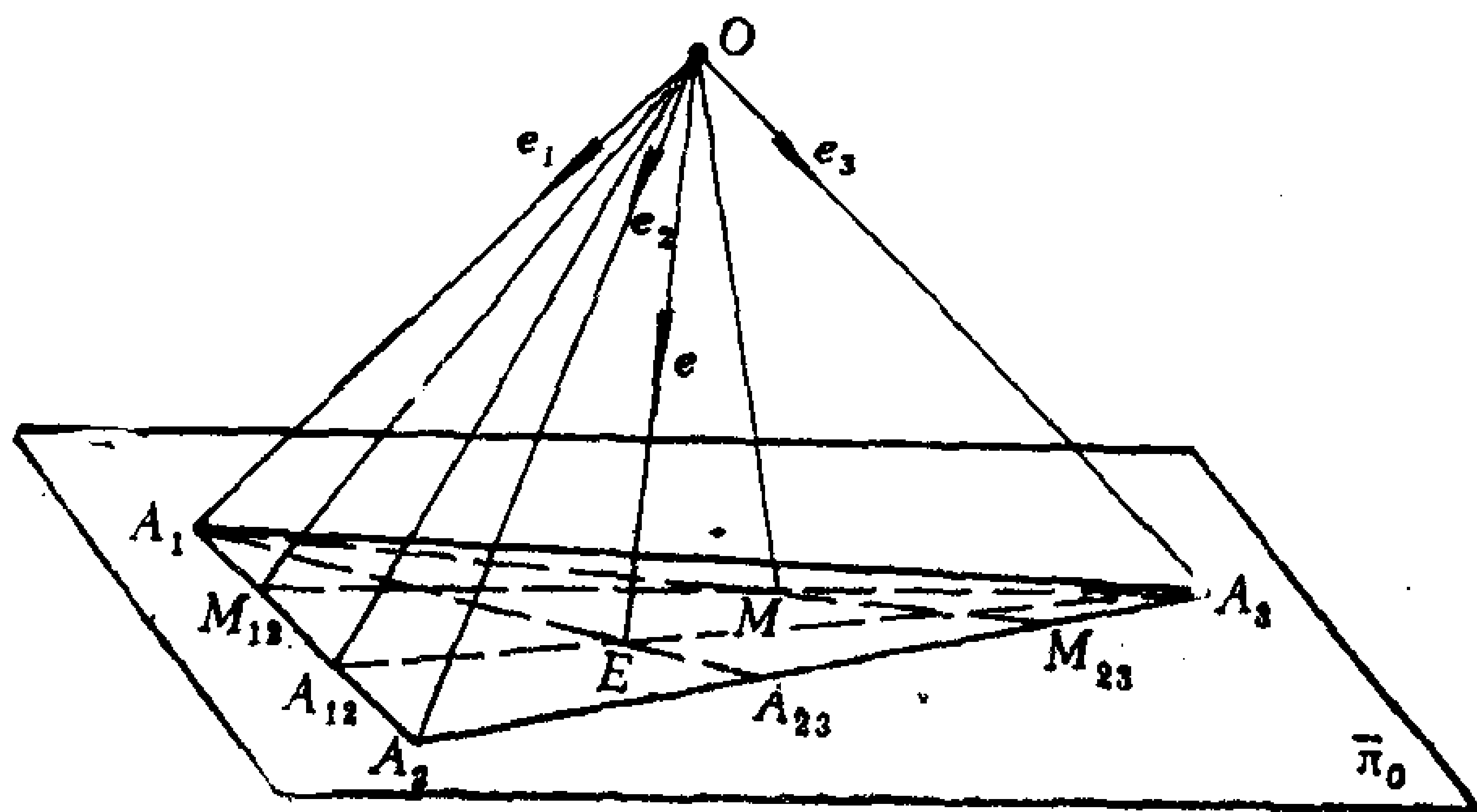



图 7.13

显然，基本点 $A_1,A_2,A_3$的射影坐标分别为(1,0,0),(0,1,0)和(0,0,1)，单位点 $E$ 的射影坐标为(1,1,1)。直线 $A_1A_2,A_2A_3$，$A_3A_1$构成的三角形称为**坐标三角形**。

现在来说明上述定义与 $\pi_0$外一点 $O$ 的取法无关。在 $OE$ 上取一个方向向量 $\boldsymbol{e}$，在 $OA_i$ 上取方向向量 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 使得 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$。设 $\overrightarrow{OM}$ 在仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 中的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)$，由定义 7.8 和定义 7.9 知，$(x_1,x_2,x_3)$ 就是点 $M$ 在基底 $[A_1,A_2,A_3,E]$ 中的射影坐标。设直线 $A_3E$ 与 $A_1A_2$ 交于点 $A_{12}$，设直

线 $A_3M$ 与 $A_1A_2$交于点 $M_{12}$(见图7.13)。由于 $\overrightarrow{OA_{12}}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ 共面以及 $\overrightarrow{OA_{12}}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OE}$ 共面，于是可以得到$\overrightarrow{OA_{12}}=\lambda(1,1,0)$。类似地，由 $\overrightarrow{OM_{12}}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$共面以及$\overrightarrow{OM_{12}}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OM}$ 共面，可得$\overrightarrow{OM_{12}}=\mu(x_1,x_2,0)$。于是 $OA_1,OA_2,OA_{12},OM_{12}$的方向向量分别为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$。在平面 $OA_1A_2$上取仿射标架 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，则 $O,A_1,A_2,A_{12},M_{12}$ 的齐次坐标分别为$(0,0,1)$，$(1,0,t_1),(0,1,t_2),(1,1,t_3),(x_1,x_2,t_4)$。易求出直线 $OA_1,OA_2$，$OA_{12},OM_{12}$在齐次坐标中的方程，从而可得它们的齐次坐标依次为$(0,1,0),(-1,0,0),(-1,1,0),(-x_2,x_1,0)$。显然有

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},$$

于是由公式(7.10)得

$$(OA_1,OA_2;OA_{12},OM_{12})=\frac{x_1}{x_2}\Big/\frac{1}{1}=\frac{x_1}{x_2}.$$

所以 $(A_1,A_2;A_{12},M_{12})=x_1:x_2$ (这里设$M$不在 $A_1A_3$线上)。类似地，对于不在 $A_1A_2$线上的点$M$，有$(A_2,A_3;A_{23},M_{23})=x_2:x_3$；对于不在 $A_2A_3$线上的点$M$，有$(A_3,A_1;A_{31},M_{31})=x_3:x_1$。由此可见，对于不在直线 $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_1$上的点$M$，它的射影坐标$(x_1,x_2,x_3)$中 $x_1:x_2,x_2:x_3,x_3:x_1$分别等于上述三个交比；而 $A_1A_3$线上的点 $M(x_1,0,x_3)$，有 $x_3:x_1$等于交比；$A_1A_2$或 $A_2A_3$线上的点类似。因此 $\pi_0$上每个点在基底$[A_1,A_2;A_3,E]$中的射影坐标与$O$点取法无关($O\overline{\in}\pi_0$)。并且点$M$的射影坐标的几何意义为：

$$x_1:x_2=(A_1,A_2;A_{12},M_{12}),$$
$$x_2:x_3=(A_2,A_3;A_{23},M_{23}),$$
$$x_3:x_1=(A_3,A_1;A_{31},M_{31}),$$

其中点 $A_{12}$是直线 $A_3E$ 与 $A_1A_2$的交点，点 $M_{12}$是直线 $A_3M$ 与$A_1A_2$的交点，等等。

不难看出，§1中点$M$的齐次仿射坐标是在特殊基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的齐次射影坐标，其中 $A_1,A_2$是无穷远点，$A_3,E$是通常点。

注意在一般的基底下，不能用点$M$的射影坐标中 $x_3$ 是否为零来判定$M$是否为无穷远点。

设点$M$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$下的射影坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，则显然有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即任一点$M$的射影坐标等于三个基本点的射影坐标的线性组合，并且组合的系数恰好就是$M$的射影坐标 $x_1,x_2,x_3$。

### 4.2 射影坐标变换公式

设$\pi_0$上有两个基底：Ⅰ$[A_1,A_2,A_3,E]$，Ⅱ$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$。设$\pi_0$上点$M$在基底Ⅰ中的射影坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，$M$在基底Ⅱ中的射影坐标为$(x'_1,x'_2,x'_3)$。我们来讨论$(x_1,x_2,x_3)$与$(x'_1,x'_2,x'_3)$之间的关系。

在$\pi_0$外取一点$O$，把$O$中相应地有两个基底$[OA_1,OA_2,OA_3,OE]$和$[OA'_1,OA'_2,OA'_3,OE']$，对于这两个基底分别取它们所对应的一个仿射标架$\widetilde{\text{Ⅰ}}$ $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$和$\widetilde{\text{Ⅱ}}$$[O;\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$，于是$\overrightarrow{OM}$在仿射标架$\widetilde{\text{Ⅰ}}$中的坐标为$(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$，$\overrightarrow{OM}$在$\widetilde{\text{Ⅱ}}$中的坐标为$(\lambda' x'_1,\lambda' x'_2,\lambda' x'_3)$。根据欧氏空间中的仿射坐标变换公式知道，存在非奇异矩阵 $A=(a_{ij})$，使得

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' x'_1 \\ \lambda' x'_2 \\ \lambda' x'_3 \end{pmatrix},$$

也就是

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix},\tag{7.14}$$

其中 $\rho$ 是非零实数，对于不同的点，$\rho$ 的值不同。公式(7.14)就是点的**射影坐标变换公式**，它表明点$M$的Ⅰ坐标可以用它的Ⅱ坐标的一次齐次多项式表示，即，点的射影坐标变换公式是线性的。公式(7.14)中的系数矩阵 $A=(a_{ij})$可以用待定系数法求得。

**例7.4** 设射影平面 $\pi_0$上取了两个基底Ⅰ$[A_1,A_2,A_3,E]$和Ⅱ$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$，已知点 $A'_1,A'_2,A'_3,E'$在基底Ⅰ中的射影坐标分别为：$(1,-1,2),(2,0,1),(-1,2,4)$和$(1,-1,0)$。求基底Ⅰ到基底Ⅱ的点的射影坐标变换公式。

**解** 所求的射影坐标变换公式形如(7.14)，其中的系数矩阵 $A=(a_{ij})$可以用待定系数法求得。

因为 $A'_1$的Ⅰ坐标是$(1,-1,2)$，Ⅱ坐标是$(1,0,0)$，所以由(7.14)得

$$\rho_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

于是得到 $a_{11}=\rho_1$，$a_{21}=-\rho_1$，$a_{31}=2\rho_1$。

类似地，分别将 $A'_2,A'_3$的Ⅰ,Ⅱ坐标代入(7.14)可以求得：

$a_{12}=2\rho_2,a_{22}=0,a_{32}=\rho_2;a_{13}=-\rho_3,,a_{23}=2\rho_3,a_{33}=4\rho_3$。

将 $E'$的Ⅰ,Ⅱ坐标代入(7.14)得到

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=\rho_4,\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=-\rho_4,\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=0.\end{cases}$$

然后把 $a_{ij}$的值代入到上述方程组中得到

$$\begin{cases}\rho_1+2\rho_2-\rho_3-\rho_4=0,\\-\rho_1+2\rho_3+\rho_4=0,\\2\rho_1+\rho_2+4\rho_3=0.\end{cases}\tag{7.15}$$

解方程组(7.15)得：

$$\rho_1=\frac{7}{15}\rho_4,\quad \rho_2=\frac{2}{15}\rho_4,\quad \rho_3=-\frac{4}{15}\rho_4,$$

其中 $\rho_4$可取任意非零实数。取 $\rho_4=15$，得 $\rho_1=7,\rho_2=2,\rho_3=-4$。从而得到

$$a_{11}=7,a_{21}=-7,a_{31}=14;a_{12}=4,a_{22}=0,a_{32}=2;a_{13}=4,$$
$$a_{23}=-8,a_{33}=-16.$$

所以从基底Ⅰ到基底Ⅱ的点的射影坐标变换公式为：

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&4\\-7&0&-8\\14&2&-16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},$$

其中 $\rho$ 为非零实数。

### 4.3 直线在射影坐标中的方程

设相异两点 $P,Q$ 在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的射影坐标分别为$(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3)$。点 $M(x_1,x_2,x_3)$在直线 $PQ$ 上的充分必要条件为：把O中相应的直线 $OM,OP,OQ$ 共面，从而有不全为零的实数 $\lambda$，$\mu$ 使得它们的方向向量 $\boldsymbol{v}_M,\boldsymbol{v}_P,\boldsymbol{v}_Q$适合：$\boldsymbol{v}_M=\lambda\boldsymbol{v}_P+\mu\boldsymbol{v}_Q$，即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix},\tag{7.16}$$

或者有

$$\begin{vmatrix}x_1&p_1&q_1\\x_2&p_2&q_2\\x_3&p_3&q_3\end{vmatrix}=0,$$

展开得

$$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0,\tag{7.17}$$

其中

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = -\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

不全为零(因为 $P,Q$ 是相异两点，所以 $\boldsymbol{v}_P \not\parallel \boldsymbol{v}_Q$)，这说明：直线 $PQ$ 在射影坐标中的方程(7.17)是三元一次齐次方程。反之，易看出，任意一个三元一次齐次方程(在射影坐标系中)都表示射影平面上的一条直线。

(7.16)称为直线 $PQ$ 在给定射影坐标系中的**参数方程**。

容易看出，$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$ 与 $\omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3x_3=0$ 表示同一条直线的充分必要条件是$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$与$(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$成比例，因此可以将$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$称为直线 $\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$ 的**齐次射影坐标**，简称为**射影坐标**。

由上述讨论还可看出：

(1) 射影平面上，设三点 $P,Q,R$ 的射影坐标分别为 $(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(r_1,r_2,r_3)$，则 $P,Q,R$ 三点共线的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) 射影平面上，设相异两点 $P,Q$ 的射影坐标分别是 $(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3)$，点 $R$ 的射影坐标是 $(r_1,r_2,r_3)$，则点 $R$ 与 $P,Q$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

请读者利用射影平面的对偶原理写出关于射影坐标的三线共点的条件。

### 4.4 用射影坐标计算交比

在§3中我们曾经给出了用齐次坐标计算交比的公式(7.11)

和(7.10)。现在我们来说明这两个公式在射影坐标下仍然成立。

**定理7.4** 设 $A,B,C,D$ 是射影平面 $\pi_0$ 上共线的四点，其中 $A,B,C$ 各不相同，并且 $D\neq A$。设 $A,B,C,D$ 在任一基底Ⅰ $[A_1,A_2,A_3,E]$ 中的射影坐标分别为 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3)$，并且

$$c_i=\lambda_1 a_i+\mu_1 b_i,\quad d_i=\lambda_2 a_i+\mu_2 b_i,\quad i=1,2,3.$$

则

$$(A,B;C,D)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1}{\mu_1}. \tag{7.18}$$

**证明** 在 $\pi_0$ 上取基底Ⅱ$[B_1,B_2,B_3,F]$，使得 $B_1,B_2$ 都为无穷远点，则 $A,B,C,D$ 在基底Ⅱ中的射影坐标 $(a'_1,a'_2,a'_3)$，$(b'_1,b'_2,b'_3)$，$(c'_1,c'_2,c'_3)$，$(d'_1,d'_2,d'_3)$ 也就是它们的齐次坐标。设

$$c'_i=\lambda'_1 a'_i+\mu'_1 b'_i,\quad d'_i=\lambda'_2 a'_i+\mu'_2 b'_i,\quad i=1,2,3.$$

则由公式(7.11)得

$$(A,B;C,D)=\frac{\lambda'_2}{\mu'_2}\Big/\frac{\lambda'_1}{\mu'_1}.$$

设基底Ⅰ到Ⅱ的射影坐标变换公式为

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix},$$

其中 $H$ 是非奇异矩阵。于是由 $c_i=\lambda_1 a_i+\mu_1 b_i$ 得

$$\rho_3^{-1}H\begin{pmatrix}c'_1\\c'_2\\c'_3\end{pmatrix}=\lambda_1\rho_1^{-1}H\begin{pmatrix}a'_1\\a'_2\\a'_3\end{pmatrix}+\mu_1\rho_2^{-1}H\begin{pmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\end{pmatrix},$$

所以

$$\lambda'_1=\lambda_1\rho_3\rho_1^{-1},\quad \mu'_1=\mu_1\rho_3\rho_2^{-1}.$$

同理可得 $\lambda'_2=\lambda_2\rho_4\rho_1^{-1}$，$\mu'_2=\mu_2\rho_4\rho_2^{-1}$。于是可以算出

$$\frac{\lambda'_2}{\mu'_2}\Big/\frac{\lambda'_1}{\mu'_1}=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1}{\mu_1},$$

从而(7.18)成立。

类似地，关于用齐次坐标计算共点四线的交比的公式(7.10)在射影坐标中仍然成立。

此外，由公式(7.12)的推导过程可以看出，既然公式(7.11)在射影坐标中也成立，因此公式(7.12)在射影坐标中同样成立。并且对于共点四线的交比类似于(7.12)的公式在射影坐标中也成立。

## 4.5 点的非齐次射影坐标

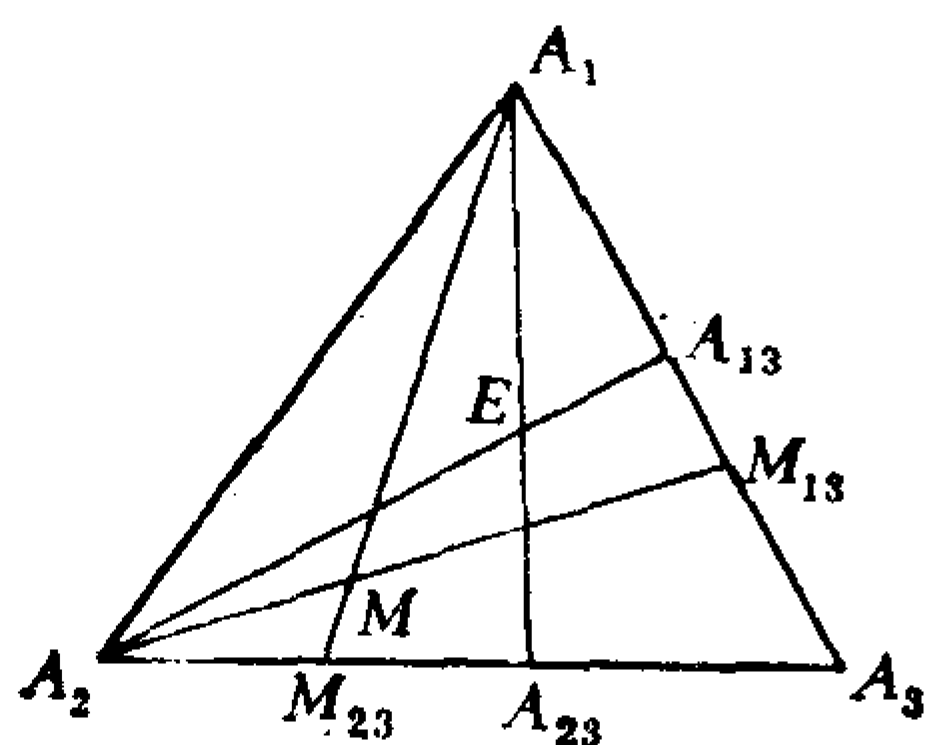



图 7.14

**定义7.10** 在射影平面上取一个基底 $[A_1, A_2, A_3, E]$，对于不在直线 $A_1A_2$ 上的点 $M(x_1, x_2, x_3)$，令

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

则称$(x, y)$是点$M$的**非齐次射影坐标**。

由前面谈到的点$M$的齐次射影坐标的几何意义知道

$$x_1 : x_3 = (A_1, A_3; A_{13}, M_{13}), \quad x_2 : x_3 = (A_2, A_3; A_{23}, M_{23}).$$

因此，点$M$的非齐次射影坐标实际上就是交比。

取另一基底Ⅱ$[A'_1, A'_2, A'_3, E']$，对于既不在直线 $A_1A_2$上，又不在直线$A'_1A'_2$上的任意一点$M$，设它在Ⅰ,Ⅱ中的齐次射影坐标分别是$(x_1, x_2, x_3)$,$(x'_1, x'_2, x'_3)$，非齐次射影坐标分别是$(x, y)$，$(x', y')$，则

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}; \quad x' = \frac{x'_1}{x'_3}, \quad y' = \frac{x'_2}{x'_3}.$$

由齐次射影坐标变换公式(7.14)得

$$\rho x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x'_j, \qquad i = 1, 2, 3.$$

从而得

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}, \\ y = \dfrac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}. \end{cases} \tag{7.19}$$

这是点的**非齐次射影坐标变换公式**，它表明点$M$在基底Ⅰ中的非齐次射影坐标$x$，$y$可以用它在Ⅱ中的非齐次射影坐标$x'$，$y'$的分式线性函数表达。

## 习 题 7.4

1. 设在射影平面的一个基底Ⅰ里给了点$B_1(4,-2,3)$，$B_2(5,2,0)$，$B_3(1,3,-2)$，$F(1,1,0)$，$M(1,1,-1)$。证明点$B_1,B_2,B_3,F$是一般位置的四个点；并且求基底Ⅰ到Ⅱ$[B_1,B_2,B_3,F]$的射影坐标变换公式；求$M$在基底Ⅱ中的射影坐标。

2. 在射影平面上，求从基底Ⅰ$[A_1,A_2,A_3,E]$到基底Ⅱ$[A_3,A_1,E,A_2]$的射影坐标变换公式。

3. 在射影平面上，设点$F$在基底Ⅰ$[A_1,A_2,A_3,E]$中的射影坐标为$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$，并且$A_1,A_2,A_3,F$是一般位置的四个点，求基底Ⅰ到Ⅱ$[A_1,A_2,A_3,F]$的射影坐标变换公式。

4. 在射影平面上取四点$B_1(1,2,1)$，$B_2(1,1,0)$，$B_3(2,1,1)$，$F(0,1,7)$，求点$M(1,1,1)$在基底$[B_1,B_2,B_3,F]$中的坐标。

5. 证明帕普斯(Pappus)定理：设$A,B,C;A',B',C'$分别是直线$l_1$和$l_2$上的三个点，并且均与$l_1$和$l_2$的交点$D$不重合，设$AB'$与$A'B$交于点$P$，$BC'$与$B'C$交于点$Q$，$CA'$与$C'A$交于点$R$，则$P,Q,R$三点共线。

6. 在射影平面上取一个基底$[A_1,A_2,A_3,E]$，$A_{23}$是直线$A_1E$与$A_2A_3$的交点，求直线$A_2A_3$上的一个点$P$使得交比$(A_2,A_3;A_{23},P)=a$。

7. 在射影平面上给了一个三角形$A_1A_2A_3$，设$P_1,P_2,P_3$分别在直线$A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2$上，但是都不和$A_1,A_2,A_3$重合，而

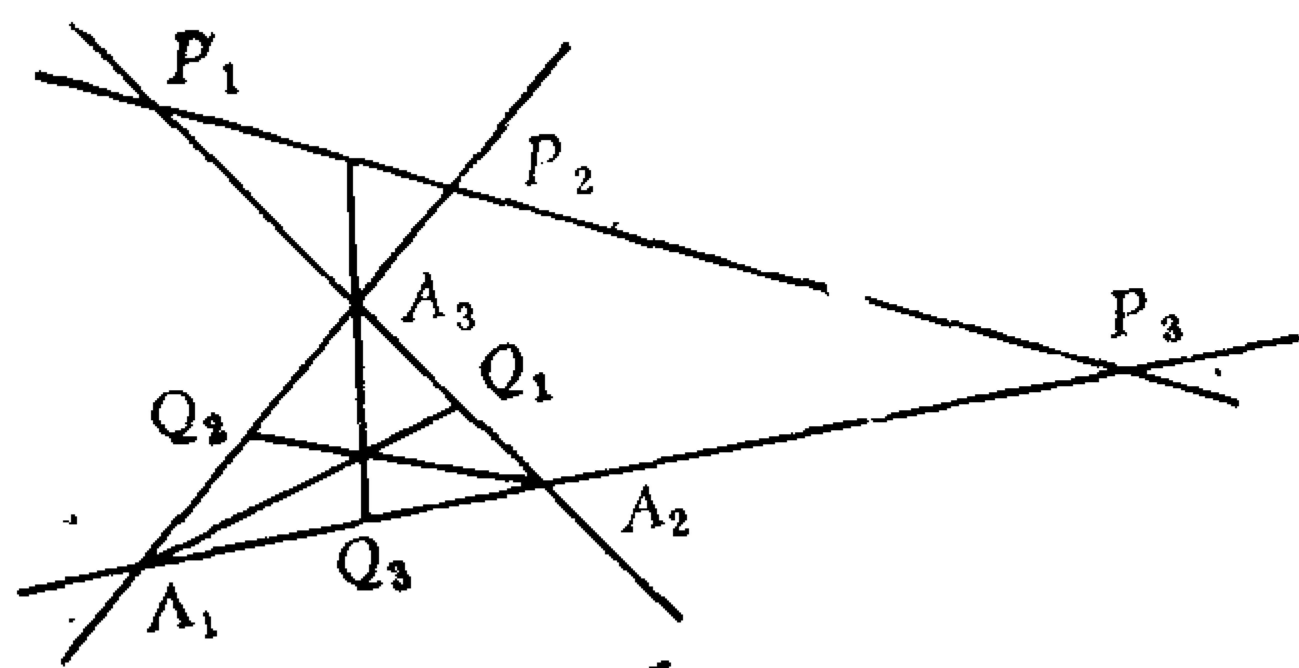



图 7.15

$Q_1,Q_2,Q_3$依次为$P_1,P_2,P_3$对于$A_2,A_3$；$A_3,A_1$；$A_1,A_2$的调和共轭点。证明：$A_1Q_1,A_2Q_2,A_3Q_3$共点的充分必要条件是$P_1,P_2,P_3$共线。

8. 在射影平面上，$A_1,A_2,A_3$和$P_1,P_2,P_3$的意义同第7题，但是

$$(A_2,A_3;Q_1,P_1)=e_1,(A_3,A_1;Q_2,P_2)=e_2,(A_1,A_2;Q_3,P_3)=e_3.$$

证明：若$P_1,P_2,P_3$共线，则$Q_1,Q_2,Q_3$共线的充分必要条件是$e_1e_2e_3=1$。又如果$P_1,P_2,P_3$在扩大的欧氏平面的无穷远直线上，那末上述命题的几何意义是什么？

9. 在射影平面上，设$A_1,A_2,A_3,P_1,P_2,P_3,Q_1,Q_2,Q_3$的意义同第8题。证明：若$P_1,P_2,P_3$共线，则$A_1Q_1,A_2Q_2,A_3Q_3$共点的充分必要条件是$e_1e_2e_3=-1$。又如果$P_1,P_2,P_3$在扩大欧氏平面的无穷远直线上，那末上述命题的几何意义是什么？

*10. 射影平面$\pi_0$上，由一般位置的四个点$A,B,C,D$(称它们为**顶点**)和由它们两两相连的六条直线(称它们为**边**)构成的图形称为**完备四点形**。不在同一顶点上的两条边称为**对边**；对边的交点称为**对角点**，如图7.16中，$E,F,G$均是对角点。

(1) 证明完备四点形的三个对角点不共线。由这三个对角点确定的三角形称为完备四点形的**对角三角形**。

(2) 证明完备四点形的任意两个对角点调和分割它们的连线和另外两条边的交点。

*11. 在射影平面上，完备四点形的对偶称为**完备四边形**。叙述第10题的第(2)小题的对偶命题，并且说明调和线束的作图方法。

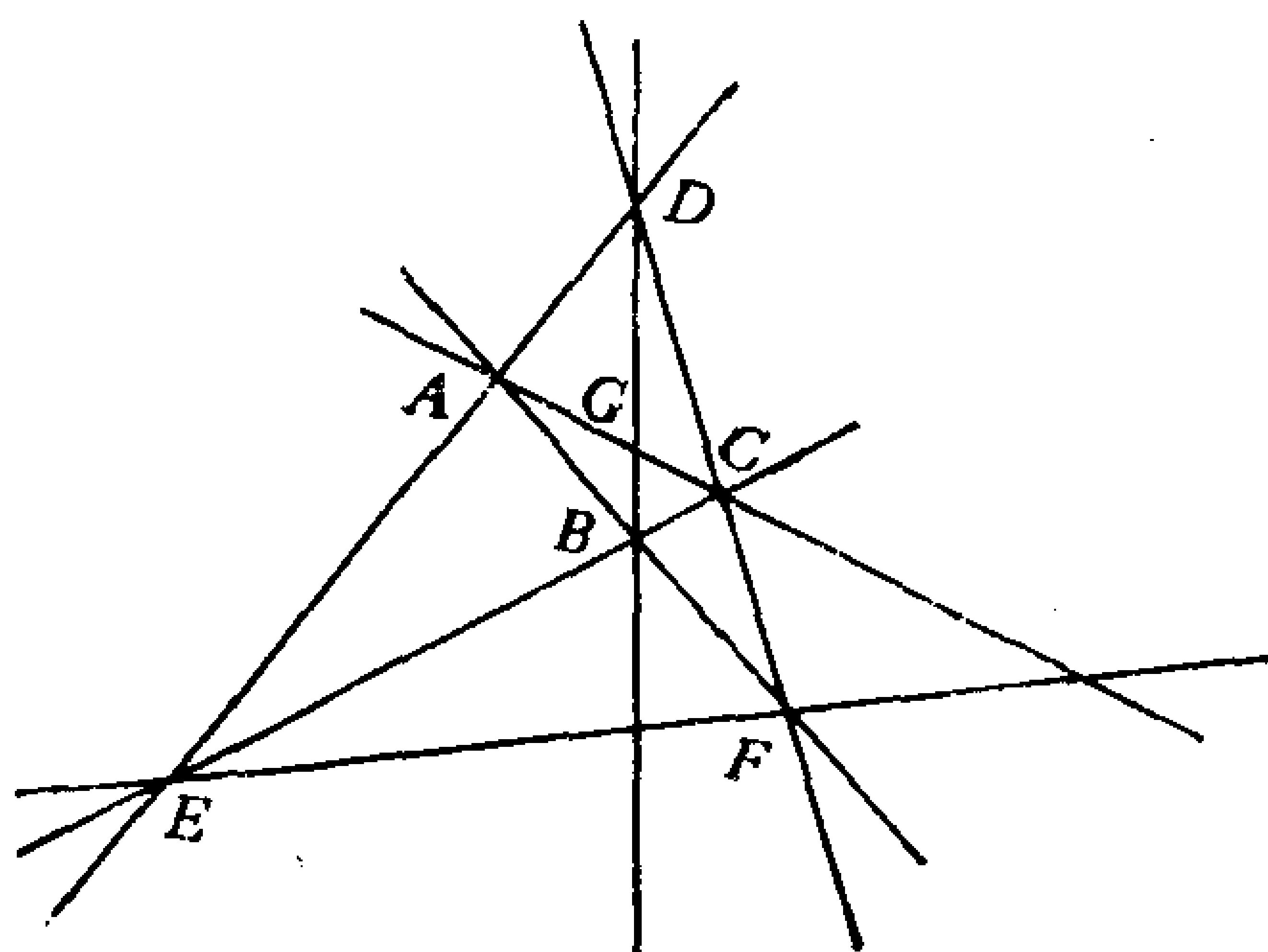



图 7.16

## §5 射影映射和射影变换

本章一开头曾介绍过中心投影，这一节我们要来讨论作为中心投影的推广的射影映射。

### 5.1 射影映射的定义和性质

首先我们来讨论中心投影的坐标表示。设$\tau$是从射影平面$\pi_0$到$\pi_1$的投影中心为$O$的中心投影。在$\pi_0$上取定一个基底$[A_1,A_2,A_3,E]$，在$\pi_1$上取定一个基底$[B_1,B_2,B_3,F]$。设$A_i,E$在$\tau$下的象分别为$A'_i,E'$，则$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$也是$\pi_1$的一个基底。从射影坐标的定义容易看出，点$M$在中心投影$\tau$下的象点$M'$在基底$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$中的坐标与点$M$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的坐标$(x_1,x_2,x_3)$相同。设$\pi_1$的基底$[B_1,B_2,B_3,F]$到基底$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$的坐标变换公式中系数矩阵为$A=(a_{ij})$，则点$M'$在基底$[B_1,B_2,B_3,F]$中的坐标$(x'_1,x'_2,x'_3)$与$M'$在基底$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$中的坐标$(x_1,x_2,x_3)$之间的关系为

$$\rho\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad(7.20)$$

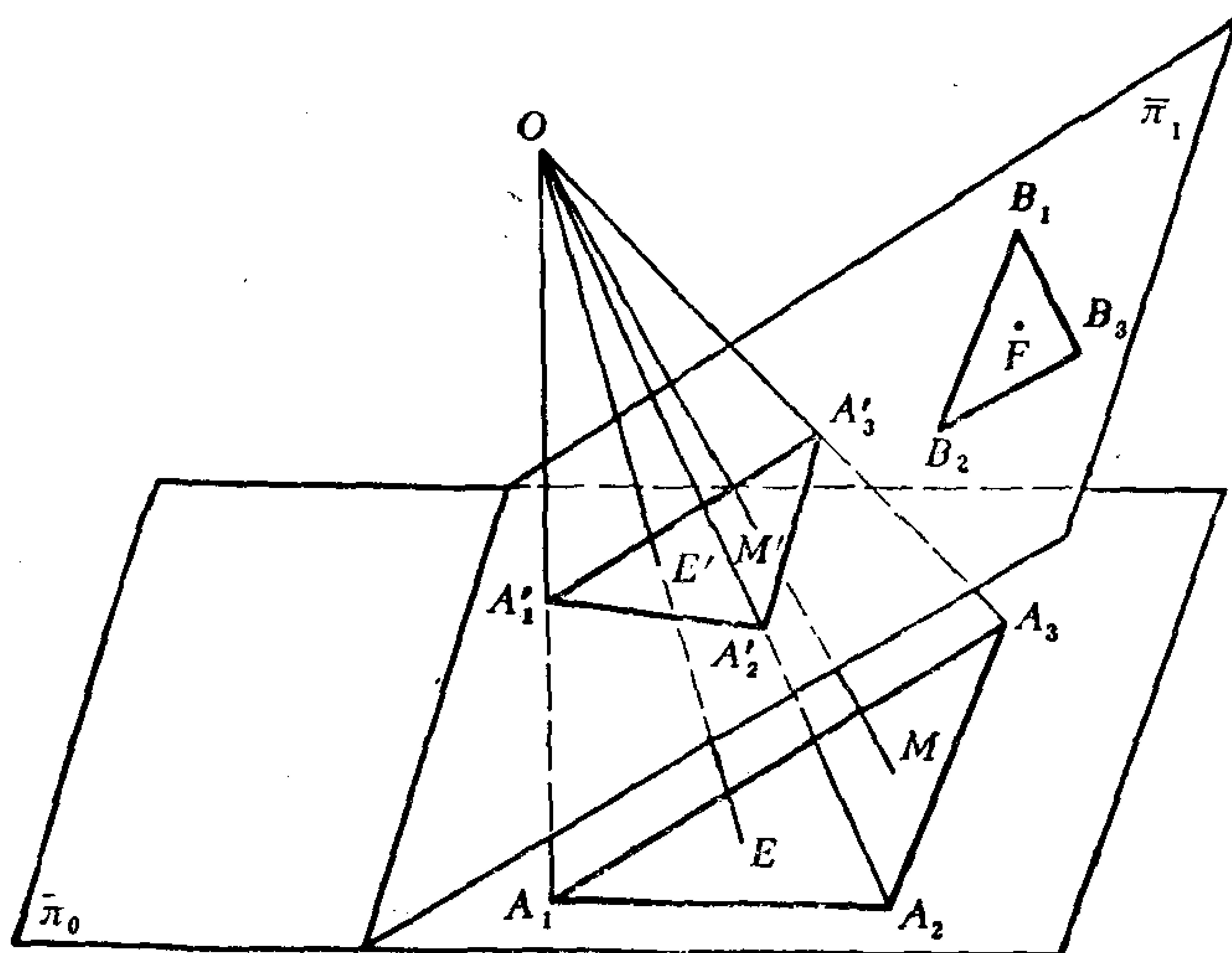



图 7.17

由于$(x_1,x_2,x_3)$也是点$M$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的坐标，因此，(7.20)也表明象点$M'$在基底$[B_1,B_2,B_3,F]$中的坐标$(x_1',x_2',x_3')$与原象$M$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的坐标$(x_1,x_2,x_3)$之间的关系，从而(7.20)是中心投影$\tau$关于$\pi_0$的基底$[A_1,A_2,A_3,E]$和$\pi_1$的基底$[B_1,B_2,B_3,F]$的坐标表达式，简称为中心投影$\tau$的公式。

现在我们将中心投影加以推广，引进射影映射的概念。

**定义7.11** 射影平面$\pi_0$到射影平面$\pi_1$的一个映射$\sigma$，如果它关于$\pi_0$的基底$[A_1,A_2,A_3,E]$和$\pi_1$的基底$[B_1,B_2,B_3,F]$的坐标表达式为

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad(7.21)$$

其中$(x_1,x_2,x_3)$是$\pi_0$上的点$M$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的射影坐标，$(x_1',x_2',x_3')$是$\pi_1$上象点$M'$在基底$[B_1,B_2,B_3,F]$中的射影坐

标，$\rho$是非零实数，系数矩阵$A=(a_{ij})$是非奇异的，那末称$\sigma$是$\pi_0$到$\pi_1$的一个**射影映射**。

不难证明，上述定义与射影坐标系的选择无关，即由公式(7.21)定义的映射$\sigma$关于$\pi_0$的一个新基底$[A_1', A_2', A_3', E']$和$\pi_1$的新基底$[B_1', B_2', B_3', F']$的坐标表达式仍然形如(7.21)的样子，并且其系数矩阵$B$仍是非奇异的，因此用$\sigma$在新基底中的坐标表达式判断，$\sigma$仍是射影映射。

显然，中心投影是射影映射。

**定理7.5** 设$\sigma$是射影平面$\pi_0$到$\pi_1$的射影映射，则$\sigma$把直线变成直线。

**证明** 在$\pi_0$上取直线$l$：$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$，即

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0. \tag{7.22}$$

用$\sigma$的公式(7.21)代到(7.22)中得

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\rho A^{-1}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=0, \tag{7.23}$$

易知$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\rho A^{-1}\neq 0$，因此，(7.23)是$x_1', x_2', x_3'$的一次齐次方程，从而它表示$\pi_1$上的一条直线$l'$. 这说明直线$l$上任一点在$\sigma$下的象都在直线$l'$上。

反之，由于把(7.21)代到(7.23)中就得到(7.22)，因此直线$l'$上任一点在$\sigma$下的原象一定在$l$上。综上述，$\sigma$把直线$l$变成直线$l'$。

定理7.5说明，射影平面$\pi_0$到$\pi_1$的射影映射$\sigma$引起了$\pi_0$的所有直线组成的集合到$\pi_1$的所有直线组成的集合的一个双射，并且$\sigma$保持点和直线的关联性。

由于射影映射$\sigma$的公式(7.21)与射影坐标变换公式(7.14)在形式上一样，因此完全类似于定理7.4的证明我们可以证得下述

的

**定理7.6** 射影映射保持共线四点的交比不变，即如果$\sigma$是射影平面$\pi_0$到$\pi_1$的射影映射，并且$\sigma$把$\pi_0$上的共线四点$A,B,C,D$分别变成$\pi_1$上的共线四点$A',B',C',D'$，那末

$$(A,B;C,D)=(A',B';C',D').$$

由于共点四线的交比等于它们在某条直线上的截影的交比，因此由定理7.6可以得到：射影映射也保持共点四线的交比不变。

## 5.2 射影映射的基本定理

由定理7.5易知，射影映射把不共线三点变成不共线三点，从而把一般位置的四个点变成一般位置的四个点。反过来，我们有

**定理7.7(射影映射基本定理)** 设$A_1,A_2,A_3,E$是$\pi_0$上一般位置的四个点，$A'_1,A'_2,A'_3,E'$是$\pi_1$上一般位置的四个点，则存在$\pi_0$到$\pi_1$的唯一的射影映射$\sigma$把$A_1,A_2,A_3,E$分别映成$A'_1,A'_2,A'_3,E'$；并且在$\sigma$下，任意一点$M\in\pi_0$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的射影坐标恰好等于其象点$M'=\sigma(M)\in\pi_1$在基底$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$中的射影坐标。

**证明** 在$\pi_0$上取基底$[A_1,A_2,A_3,E]$，在$\pi_1$上取基底$[A'_1,A'_2,A'_3,E']$。设射影映射$\sigma$关于这两个基底的坐标表达式为

$$\rho\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

假如$\sigma(A_i)=A'_i$，$\sigma(E)=E'$，则

$$\rho_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \rho_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\rho_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \rho_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

于是得 $a_{ij}=0$，当 $i\neq j$；$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\lambda\neq 0$。选取 $\lambda=1$，从而(7.24)成为

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}. \qquad (7.24)'$$

根据射影映射的定义，(7.24)′确定了一个射影映射，而且从上述知，把$A_1,A_2,A_3,E$分别映成$A_1',A_2',A_3',E'$的射影映射一定就是它。这样我们就证明了存在$\pi_0$到$\pi_1$的唯一的射影映射$\sigma$把 $A_1$，$A_2,A_3,E$分别映成 $A_1',A_2',A_3',E'$。从 $\sigma$的坐标表达式(7.24)′可以得到

$$\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

这说明 $\pi_0$ 上任一点$M$在基底$[A_1,A_2,A_3,E]$中的射影坐标$(x_1,x_2,x_3)$等于它的象点 $M'$ 在基底$[A_1',A_2',A_3',E']$中的射影坐标 $(x_1',x_2',x_3')$(注意：$\rho(x_1',x_2',x_3')$与$(x_1',x_2',x_3')$都是点 $M'$的射影坐标)。

下面我们指出射影映射基本定理在航空摄影中的应用。本章一开头我们曾指出，航空摄影时在底片上所得到的象是一块大地(假定地面是平的)经过中心投影以后的象，并且由于飞机飞行时的颠簸，使得底片与地面不平行，因此，底片上的象通常不是地面的相似图，而是变了形的图象.利用射影映射基本定理就可以给出矫正摄影图象的适当的方法。矫正的目的是要从底片得到地面的一个相似图，而地面的一张相似图就是地面$\pi_0$在一个水平平面 $\pi'$ 上的中心投影，可以设想中心就是镜头。因此，相似图 $\pi'$ 也是底片 $\pi_1$ 在相应的中心投影下的象，而中心投影是一个射影映

射，根据射影映射基本定理，要想从底片$\pi_1$得到地面的一张相似图$\pi'$，只须确定$\pi_1$上一组一般位置的四个点所对应的$\pi'$上的四个点就够了，这是因为这两组一般位置的四个点就唯一确定了这个中心投影。具体做法如下：取一张准确的地形图$\pi_0'$（不必很详细），在$\pi_0'$上任意选取一组一般位置的四个点 $A',B',C',D'$，在底片$\pi_1$上找出它们的对应点$A,B,C,D$。然后把 $\pi_1$和$\pi_0'$装到灯光照射器上，调整它们的位置，使得$A,B,C,D$正好分别照射到 $A',B'$，$C',D'$上。最后，把地图 $\pi_0'$ 换成照相正片，注意不要变动调整好的位置；那么正片上印出的就是一张地面的相似图，它是由底片$\pi_1$经过矫正得到的。

## 5.3 射影变换

射影平面$\pi_0$到自身的射影映射 $\sigma$称为 $\pi_0$的**射影变换**，此时 $\sigma$ 的公式(7.21)中$(x_1',x_2',x_3')$和$(x_1,x_2,x_3)$分别是象点和原象对于同一个基底的射影坐标。

由于射影变换公式中的系数矩阵是可逆矩阵，因此由可逆矩阵的性质立即得到：射影变换的乘积还是射影变换；恒等变换是射影变换；射影变换是可逆的，其逆变换仍是射影变换。从而射影平面上的所有射影变换形成一个群，称它为**射影变换群**。

关于射影映射的定理 7.5,7.6 以及射影映射基本定理对于射影变换同样成立。

同样有，射影平面的一个射影变换 $\sigma$(点变换)引起了这个射影平面上的所有直线组成的集合到自身的一个双射，并且 $\sigma$保持点与直线的关联性。

**例7.5** 在射影平面上，求把点$A(1,0,1)$，$B(2,1,1)$，$C(3,-1,0)$，$D(3,5,2)$分别变成点 $A'(-1,0,3)$，$B'(1,1,3)$，$C'(2,3,8)$，$D'(2,1,-2)$的射影变换$\sigma$的公式。

**解** 设 $\sigma$的公式为

$$\lambda\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

由已知条件得

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&3\\0&1&-1&5\\1&1&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\lambda_1&\lambda_2&2\lambda_3&2\lambda_4\\0&\lambda_2&3\lambda_3&\lambda_4\\3\lambda_1&3\lambda_2&8\lambda_3&-2\lambda_4\end{pmatrix},$$

比较两边矩阵的第一行得

$$\begin{cases}a_{11}+a_{13}=-\lambda_1,\\2a_{11}+a_{12}+a_{13}=\lambda_2,\\3a_{11}-a_{12}=2\lambda_3,\\3a_{11}+5a_{12}+2a_{13}=2\lambda_4.\end{cases}$$

由此方程组可以得到

$$\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4=0. \tag{7.25}$$

比较上面等式两边矩阵的第二行可得到

$$4\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4=0. \tag{7.26}$$

比较上面等式两边矩阵的第三行可得到

$$3\lambda_1-6\lambda_2+4\lambda_3-\lambda_4=0. \tag{7.27}$$

联立(7.25),(7.26),(7.27)解得

$$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3}{4}\lambda_4,\\\lambda_2=-\dfrac{1}{8}\lambda_4,\\\lambda_3=-\dfrac{1}{2}\lambda_4.\end{cases}$$

再代回到上述三个方程组，即可求出$a_{ij}$的值(与$\lambda_4$有关)，适当选

取$\lambda_4$的值，可以得到$\sigma$的公式为

$$\lambda\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 23 & -21\\-13 & 9 & 13\\-53 & -31 & 125\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

## 5.4 分式线性变换

现在在射影平面上取定一个基底$[A_1,A_2,A_3,E]$。设射影变换$\sigma$的公式为(7.21)。对于不在直线$A_1A_2$上，并且不在直线$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0$上的点$M(x_1,x_2,x_3)$，设它的非齐次射影坐标为$(x,y)$，设$M$在$\sigma$下的象$M'(x',y',z')$的非齐次射影坐标为$(x',y')$。由于

$$x'=\frac{x'_1}{x'_3},\quad y'=\frac{x'_2}{x'_3},\quad x_1=xx_3,\quad x_2=yx_3,$$

因此由(7.21)得

$$\begin{cases}x'=\dfrac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}},\\[2ex] y'=\dfrac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}}.\end{cases}\tag{7.28}$$

公式(7.28)是射影变换$\sigma$在非齐次射影坐标中的表达式，它是分式线性函数，并且

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0.\tag{7.29}$$

由此可见，射影平面的射影变换用非齐次射影坐标表达时，是平面的分式线性变换。

## 5.5 仿射——射影变换

考虑扩大欧氏平面$\pi_0$上的把无穷远直线变成无穷远直线的射影变换，这样的射影变换称为**仿射——射影变换**。

取一个仿射——射影变换$\sigma$，在$\pi_0$上取一个基底 I：$[A_1, A_2, A_3, E]$，使得$A_1, A_2$为假点，这时点的齐次射影坐标也就是点的齐次仿射坐标，非齐次射影坐标也就是点的仿射坐标。设$\sigma$在I中的公式仍为(7.21)，由于无穷远直线$x_3=0$上的点均变成无穷远点，因此由(7.21)得

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix},\tag{7.30}$$

取$x_1=1$，$x_2=0$，则得$a_{31}=0$；取$x_1=0$，$x_2=1$，得$a_{32}=0$。于是$\sigma$在I中的公式成为

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\tag{7.31}$$

由于$\sigma$的公式中的系数矩阵应为非奇异的，因此有

$$a_{33}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0,$$

从而$a_{33}\neq0$。令

$$c_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{33}},\qquad i=1,2,3;\ j=1,2,3.$$

则$\sigma$在I中的公式又可写成

$$\lambda'\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\tag{7.32}$$

其中$\lambda'=\dfrac{\lambda}{a_{33}}$，并且

$$\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{vmatrix}\neq0.\tag{7.33}$$

现在考虑$\pi_0$上的任一通常点$M(x_1,x_2,x_3)$，设它的仿射坐标为$(x,y)$，则$x=\dfrac{x_1}{x_3}, y=\dfrac{x_2}{x_3}$。设$M$在$\sigma$下的象$M'$（$M'$必为通常点）

的仿射坐标为$(x',y')$。由$\sigma$用非齐次射影坐标表达的公式(7.28)得

$$
\begin{cases}
x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}, \\
y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}.
\end{cases}
\tag{7.34}
$$

由(7.33)知，此公式(7.34)的系数矩阵是非奇异的。这说明，$\pi_0$上的仿射——射影变换$\sigma$限制到$\pi_0$上时，它是仿射变换(7.34)。在这个意义上我们可以说：仿射变换是特殊的射影变换。

## 习 题 7.5

1. 在射影平面上，取一个基底$[A_1,A_2,A_3,E]$，求把点$B_1(1,0,1)$，$B_2(2,0,1)$，$B_3(0,1,1)$，$F(0,2,1)$分别变到基点$A_1,A_2,A_3,E$的射影变换$\sigma$的公式。

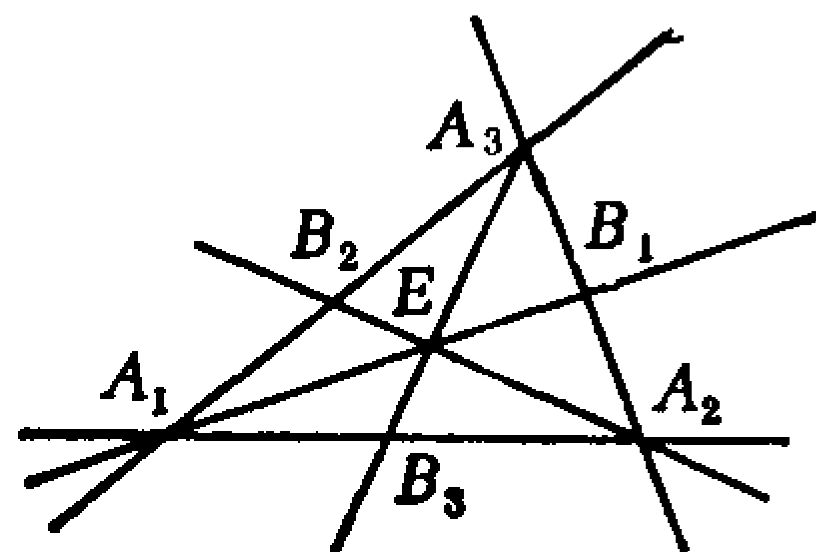


图 7.18

2. 在射影平面上，取一基底$[A_1,A_2,A_3,E]$，设$B_i$为坐标三角形的顶点$A_i$与单位点$E$的连线$A_iE$跟对边的交点，求把$A_1,A_2,A_3$分别变成$B_1,B_2,B_3$的射影变换的公式的一般形式。

3. 在扩大的欧氏平面上，求出把直线$x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=0$分别变为直线$a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3=0$ $(i=1,2,3)$的射影变换的公式的一般形式。

4. 证明：在射影平面上，以坐标三角形的三个顶点为不动点的射影变换的公式的一般形式是

$$
\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},
$$

其中$a,b,c$均可取任意非零实数。

5. 在射影平面上，射影变换$\sigma$的公式为

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\-2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

求$\sigma$ 的不动点和不变直线。

*6. 设射影平面上的一个点变换 $\sigma$ 有不动点$A$和不动直线$l_0$($l_0$上每点均不动)，$A$不在$l_0$上，并且对于每个其它点$P$，$\sigma$ 把$P$变到$AP$上一点$P'$，使得$(A,P_0;P,P')=e$，其中$P_0$是$AP$和$l_0$的交点，$e$ 是常数($\neq 0,1$)。证明$\sigma$是射影变换。此时称$\sigma$是**透射**，$A$ 为**透射中心**，$l_0$ 为**透射轴**。

## §6 配极，二次曲线的射影分类

### 6.1 射影平面上的二次曲线

射影平面上，射影坐标满足二次齐次方程

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0 \tag{7.35}$$

的点的集合称为**二次曲线**。

显然若点$M(x_1,x_2,x_3)$在二次曲线(7.35)上，则它的任一射影坐标$(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$满足方程(7.35)；并且二次曲线(7.35)在任意基底下的方程仍是二次齐次方程。

把二次曲线方程(7.35)的左端简记作 $F(x_1,x_2,x_3)$，它可以写成

$$F(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

其中系数矩阵$A=(a_{ij})$是对称矩阵。如果$A$是非奇异的，则称二次曲线(7.35)是非退化的，否则称为退化的。

方程(7.35)可写成

$$X^tAX=0, \tag{7.35$'$}$$

其中$X^t=(x_1,x_2,x_3)$；方程(7.35)也可以写成

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0,\ \text{其中}\ a_{ij}=a_{ji}; \qquad (7.35)''$$

现在考虑扩大欧氏平面$\pi_0$,在$\pi_0$上取一个直角标架$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，相应的$\pi_0$的基底记作Ⅰ．则点$M$在Ⅰ中的射影坐标$(x_1,x_2,x_3)$就是$M$的齐次坐标，于是$M$在$[O_1;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$中的仿射坐标为

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}.$$

设给了二次曲线$\bar{S}$，它在Ⅰ中的方程为(7.35)．

情形1．$a_{11},a_{22},a_{33}$不全为零．

通常点$M(x_1,x_2,x_3)$在$\bar{S}$上的充分必要条件为$M$的仿射坐标$(x,y)$适合

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (7.36)$$

无穷远点$N(x_1,x_2,0)$在$\bar{S}$上的充分必要条件为$N$相应的$\pi_0$上的方向$\boldsymbol{v}(x_1,x_2)$适合

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{12}x_1x_2=0, \qquad (7.37)$$

这表明$\boldsymbol{v}(x_1,x_2)$是$\pi_0$上的二次曲线（7.36）的渐近方向．

所以当$a_{11},a_{22},a_{33}$不全为零时，$\pi_0$上的二次曲线$\bar{S}$是由欧氏平面$\pi_0$上的二次曲线(7.36)以及它的渐近方向所对应的无穷远点所组成．

情形2．$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$．则通常点$M(x_1,x_2,x_3)$在$\bar{S}$上的充分必要条件为它的仿射坐标$(x,y)$满足方程

$$2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (7.38)$$

在情形2下，任一无穷远点的坐标都满足(7.35)，从而整条无穷远直线在$\bar{S}$上．因此，若$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$，则$\bar{S}$或者由一条射影直线(7.38)和一条无穷远直线组成，或者由一对重合的无穷远直线组成．

总之，射影平面$\pi_0$上的二次曲线$\bar{S}$有11种，其中9种分别

是欧氏平面$\pi_0$上的二次曲线并且补充了它的渐近方向所对应的无穷远点；另外两种是：一条射影直线(7.38)和一条无穷远直线；一对重合的无穷远直线。

## 6.2 二次曲线的切线

现在研究直线与二次曲线相交的情况。设直线$PQ$的参数方程为

$$x_i = \lambda p_i + \mu q_i,\ \lambda,\mu\text{不全为零},\ i=1,2,3. \qquad (7.39)$$

代入二次曲线$\bar{S}$的方程(7.34)中，得

$$[\lambda(p_1,p_2,p_3)+\mu(q_1,q_2,q_3)]A\left[\lambda\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\right]=0,$$

即

$$\lambda^2F(p_1,p_2,p_3)+\mu^2F(q_1,q_2,q_3)+2\lambda\mu\bar{F}(p_1,p_2,p_3;\ q_1,q_2,q_3)=0, \qquad (7.40)$$

其中

$$\bar{F}(p_1,p_2,p_3;\ q_1,q_2,q_3)=(p_1,p_2,p_3)A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}.$$

如果$F(p_1,p_2,p_3)=F(q_1,q_2,q_3)=\bar{F}(p_1,p_2,p_3;\ q_1,q_2,q_3)=0$，则$\lambda,\mu$可取任意不全为零的实数，从而直线$PQ$的所有点都在二次曲线$\bar{S}$上。

如果$F(p_1,p_2,p_3)$，$F(q_1,q_2,q_3)$，$\bar{F}(p_1,p_2,p_3;\ q_1,q_2,q_3)$不全为零，则(7.40)可确定$\lambda:\mu$的两个值(不同的，或相同的，或虚的)，从而得到直线$PQ$与二次曲线$\bar{S}$有两个交点(不同的，或重合的，或虚的)。

**定义7.12** 若直线$L$与二次曲线$\bar{S}$有重合的两个交点，或者$L$整个在$\bar{S}$上，则称$L$是$\bar{S}$的**切线**，它们的交点称为**切点**。

设直线$L$是$\bar{S}$的切线，切点为$P$。在$L$上任取一点$Q(\neq P)$，设$P,Q$的射影坐标分别是$(p_1,p_2,p_3)$，$(q_1,q_2,q_3)$，$L$的参数方程为(7.39)。因为$L$与$\bar{S}$有二重交点$P$，所以(7.40)确定$\lambda:\mu$的两

个相同的值，从而得

$$[\overline{F}(p_1,p_2,p_3;\ q_1,q_2,q_3)]^2-F(p_1,p_2,p_3)\cdot F(q_1,q_2,q_3)=0,$$

由于$P$在$\overline{S}$上，所以$F(p_1,p_2,p_3)=0$，从而由上式得

$$\overline{F}(p_1,p_2,p_3;\ q_1,q_2,q_3)=0. \tag{7.41}$$

切线$L$上任一点$Q(q_1,q_2,q_3)$均适合(7.41)，即适合方程

$$(p_1,p_2,p_3)\ A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0. \tag{7.42}$$

若$(p_1,p_2,p_3)A\neq 0$，则(7.42)是一次齐次方程，它就是切线$L$的方程。若$(p_1,p_2,p_3)A=0$，则$x_1,x_2,x_3$可取任意不全为零的实数值，这意味着扩大欧氏平面上任一点与点$P$的连线都是$\overline{S}$的切线。

二次曲线$\overline{S}$上的点$P(p_1,p_2,p_3)$，如果使得

$$(p_1,p_2,p_3)A=0,$$

则称点$P$是$\overline{S}$的**奇点**。

显然，非退化的二次曲线没有奇点(因为$A$非奇异)。

设直线$L$整个在$\overline{S}$上，则仍可得到(7.41)式，因此仍有上述结论。

## 6.3 极点和极线

取点$P(p_1,p_2,p_3)$不在二次曲线$\overline{S}$上。过点$P$引任意一条直线$L$，使得$L$与$\overline{S}$有两个不同的交点$G,H$，作点$P$关于$G,H$的调和共轭点$Q$，即，使得$(G,H;P,Q)=-1$。用这样的方法所作的点$Q$的几何轨迹称为点$P$关于二次曲线$\overline{S}$的**配极**，而点$P$对于配极而言称为**极点**。

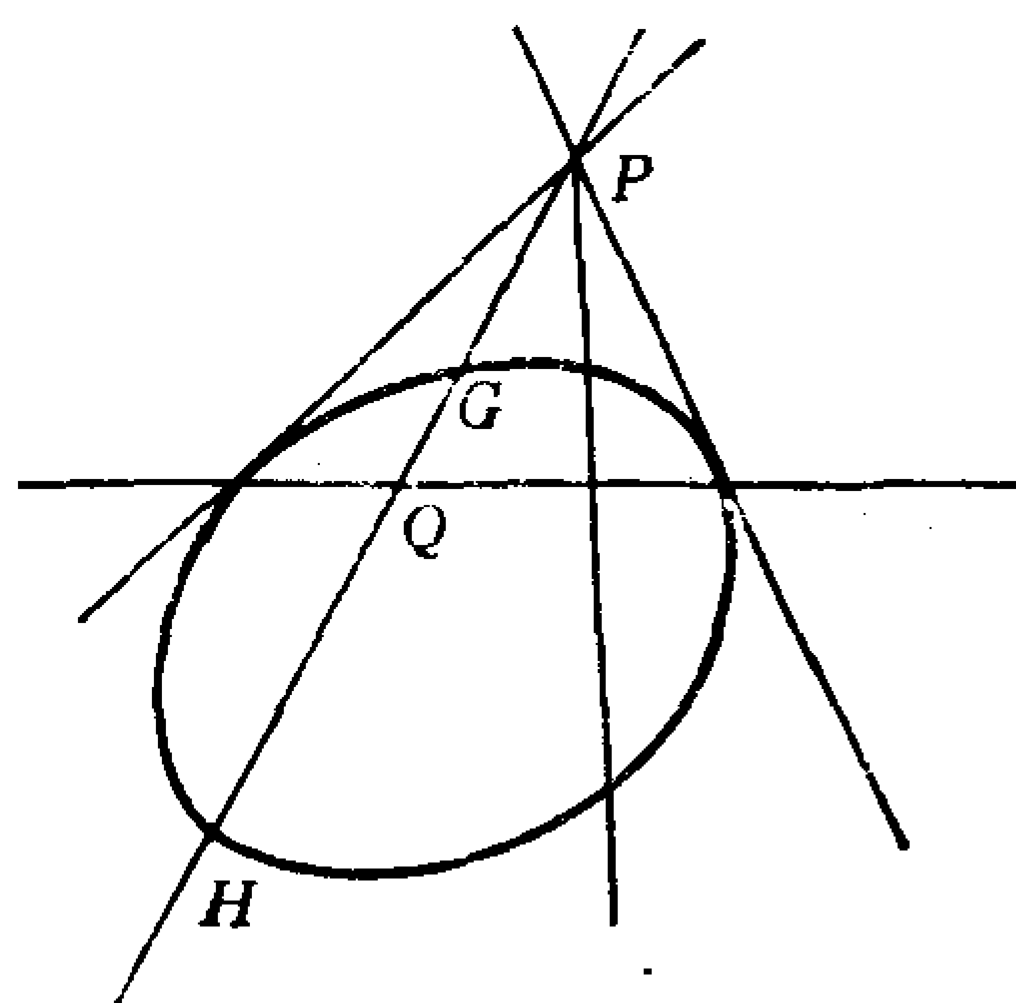



图 7.19

现在来求点$P(p_1,p_2,p_3)$

关于二次曲线$\overline{S}$的配极的方程。设$Q(q_1,q_2,q_3)$是配极上任一点，则直线$PQ$的参数方程为(7.39)，它与$\overline{S}$的交点$G$、$H$对应的参数值$\lambda_i,\mu_i$满足(7.40)。设$\lambda_1,\mu_1$和$\lambda_2,\mu_2$是满足(7.40)的两组值，则$G$点坐标为

$$(\lambda_1 p_1+\mu_1 q_1,\lambda_1 p_2+\mu_1 q_2,\lambda_1 p_3+\mu_1 q_3),$$

$H$点的坐标为

$$(\lambda_2 p_1+\mu_2 q_1,\lambda_2 p_2+\mu_2 q_2,\lambda_2 p_3+\mu_2 q_3),$$

从而

$$(P,Q;G,H)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1}{\mu_1}.$$

因为$(P,Q;G,H)=(G,H;P,Q)=-1$，所以

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}=0.$$

于是由(7.40)得

$$\overline{F}(p_1,p_2,p_3;q_1,q_2,q_3)=0,$$

这说明，点$P$关于$\overline{S}$的配极上的任一点$Q(q_1,q_2,q_3)$满足

$$(p_1,p_2,p_3)\,A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0, \tag{7.43}$$

由于$P$不在$\overline{S}$上，所以$(p_1,p_2,p_3)A\neq 0$，从而(7.43)是$x_1,x_2,x_3$的一次方程，于是点$P(\overline{\in}\overline{S})$关于$\overline{S}$的配极上的任意一点$Q$都在直线(7.43)上，为简便起见，干脆把整条直线(7.43)称为点$P$($\overline{\in}\overline{S}$)关于二次曲线$\overline{S}$的配极，因此配极也称为**极线**，它的方程是(7.43)，或者写成

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}p_i x_j=0. \tag{7.44}$$

若点$P(p_1,p_2,p_3)$在二次曲线$\overline{S}$上，且$P$不是$\overline{S}$的奇点，则以$P$为切点的切线方程(7.42)与(7.43)形式一样，因此，这时我们把以$P$为切点的切线就称为点$P(\in\overline{S})$关于$\overline{S}$的极线。

若点$P(p_1,p_2,p_3)$是$\overline{S}$的奇点，则$(p_1,p_2,p_3)A=0$，从而$\pi_0$

上任一点都满足方程(7.43)，因此，这时我们把任一条直线都看作是奇点$P$的极线。

极线有两条重要性质：

(1) 点$P$的极线上的任何一点$Q$的极线通过点$P$。

**证明** 在点$P(p_1,p_2,p_3)$的极线上任取一点$Q(q_1,q_2,q_3)$，则有

$$(p_1,p_2,p_3)\ A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=0,$$

两边取转置得

$$(q_1,q_2,q_3)\ A\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=0,$$

这表明点$P$在点$Q$的极线上。

(2) 点$P$的极线通过点$P$的充分必要条件为$P$在二次曲线$\bar{S}$上。

**证明** 点$P(p_1,p_2,p_3)$在自己的极线上的充分必要条件是

$$(p_1,p_2,p_3)\ A\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=0,$$

即$P$在$\bar{S}$上。

若$\bar{S}$是非退化二次曲线，则$\bar{S}$没有奇点。因此$\pi_0$上每一点$P$都有关于$\bar{S}$的唯一的极线。反之，$\pi_0$上的每一条直线$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$必定是某一个确定的点关于$\bar{S}$的极线，这是因为$(p_1,p_2,p_3)A=(b_1,b_2,b_3)$有唯一的解：

$$(p_1,p_2,p_3)=(b_1,b_2,b_3)A^{-1}.$$

**定义7.13** 设$\bar{S}$是非退化二次曲线，$\pi_0$上的点的集合与直线的集合之间有一个一一对应$\tau$：点$P$对应于它关于$\bar{S}$的极线$L_P$，直线$L$对应于它关于$\bar{S}$的极点$Q_L$。称$\tau$是扩大欧氏平面$\pi_0$关于

$\bar{S}$ 的**配极映射**。

配极映射保持关联性，这是因为如果点 $P$ 在直线 $L$ 上，设 $L$ 是点 $Q_L$ 的极线，则 $P$ 点的极线 $L_P$ 通过点 $Q_L$。

## 6.4 自配极三角形

任给一条二次曲线 $\bar{S}$，任取一条直线 $L$，它不是 $\bar{S}$ 的切线，在 $L$ 上任取一点 $A(\bar{\in}\bar{S})$，作点 $A$ 关于 $\bar{S}$ 的极线 $L_A$，它与 $L$ 交于点 $B$，则 $B$ 必异于 $A$（假如 $B=A$，则 $L_A$ 通过 $A$，从而 $A\in\bar{S}$，矛盾）。

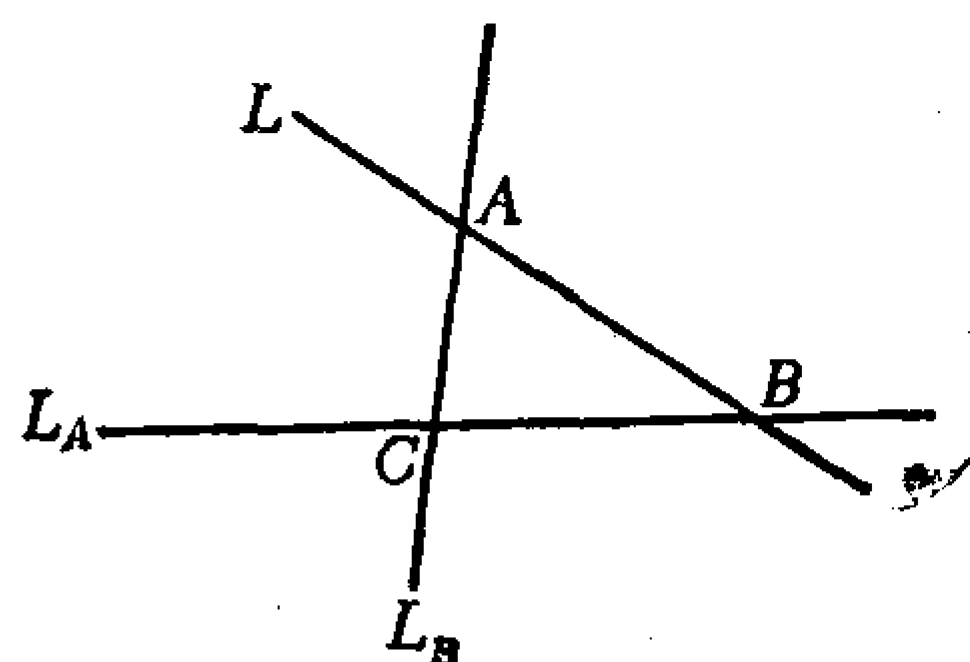



图 7.20

情形1. 若 $B$ 不在 $\bar{S}$ 上。则作点 $B$ 关于 $\bar{S}$ 的极线 $L_B$，它与 $L_A$ 交于 $C$，点 $C$ 必异于 $B$，也异于 $A$。由于 $B$ 在 $A$ 的极线 $L_A$ 上，所以 $B$ 的极线 $L_B$ 通过 $A$。由于 $C$ 在 $A$ 的极线上，所以 $C$ 的极线通过 $A$，同理 $C$ 的极线通过 $B$，因此，$C$ 的极线就是 $L$。于是我们得到一个三角形 $ABC$，它的每一条边是对顶点的极线，这样的三角形称为关于二次曲线 $\bar{S}$ 的**自配极三角形**。

情形2. 若 $B$ 在 $\bar{S}$ 上，且 $B$ 是 $\bar{S}$ 的奇点。则过 $A$ 作一条直线 $L_B$，使 $L_B$ 与 $L_A$ 的交点 $C$ 异于 $B$，这样也得到一个三角形 $ABC$，它的每一条边是对顶点的极线，因此这也是关于 $\bar{S}$ 的自配极三角形。

情形3. 若 $B$ 在 $\bar{S}$ 上，且 $B$ 不是 $\bar{S}$ 的奇点，则 $B$ 的唯一的极线 $L_B$ 通过 $B$，又 $L_B$ 通过 $A$，于是 $L_B$ 与 $L$ 重合。由于 $B$ 在 $\bar{S}$ 上，所以 $B$ 的极线 $L_B$ 是 $\bar{S}$ 的切线，这与已知 $L$ 不是 $\bar{S}$ 的切线矛盾，这说明情形 3 不可能发生。

## 6.5 二次曲线的射影分类

任给一条二次曲线 $\bar{S}$，它在基底 I 中的方程为(7.35)。现在取

关于$\bar{S}$的一个自配极三角形 $ABC$ 作为坐标三角形建立一个基底 Ⅱ$[A,B,C,F]$。设 $\bar{S}$在Ⅱ中的方程为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^{*} x_i^{*} x_j^{*} = 0. \tag{7.45}$$

$\triangle ABC$ 的三条边 $BC,AC,AB$ 在Ⅱ中的方程分别为

$$x_1^{*} = 0,\quad x_2^{*} = 0,\quad x_3^{*} = 0.$$

因为 $BC$是点$A$的极线，所以$BC$在Ⅱ中的方程又应为

$$(1,0,0)\begin{pmatrix} a_{11}^{*} & a_{12}^{*} & a_{13}^{*} \\ a_{12}^{*} & a_{22}^{*} & a_{23}^{*} \\ a_{13}^{*} & a_{23}^{*} & a_{33}^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{*} \\ x_2^{*} \\ x_3^{*} \end{pmatrix} = 0,$$

即
$$a_{11}^{*} x_1^{*} + a_{12}^{*} x_2^{*} + a_{13}^{*} x_3^{*} = 0.$$

于是得
$$a_{12}^{*} = 0,\quad a_{13}^{*} = 0.$$

同理，因为 $AC$ 是点$B$的极线，所以可得 $a_{12}^{*} = 0$，$a_{23}^{*} = 0$。于是 $\bar{S}$ 在Ⅱ中的方程成为

$$a_{11}^{*} x_1^{*2} + a_{22}^{*} x_2^{*2} + a_{33}^{*} x_3^{*2} = 0. \tag{7.46}$$

适当选取自配极三角形的顶点的次序，(7.46)可分为以下几种情况：

情形1. $\lambda_1 x_1^{*2} + \lambda_2 x_2^{*2} + \lambda_3 x_3^{*2} = 0$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$；

情形2. $\lambda_1 x_1^{*2} + \lambda_2 x_2^{*2} = 0$，$\lambda_1\lambda_2 \neq 0$；

情形3. $\lambda_1 x_1^{*2} = 0$，$\lambda_1 \neq 0$。

再取基底Ⅲ，使Ⅱ到Ⅲ的坐标变换公式为

$$\rho x_i^{*} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \tilde{x}_i, \qquad i = 1,2,3.$$

则从情形 1 可得

1.1) $\tilde{x}_2^1 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 = 0$；

1.2) $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 = 0$；

从情形 2 可得

2.3) $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = 0$；

2.4) $\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 = 0$；

从情形3可得

3.5) $\bar{x}_1^2=0$。

因此，任给一条二次曲线 $\bar{S}$，我们总可以适当选取一个基底，使得$\bar{S}$的方程为上述这五个方程中的某一个。由于射影坐标变换公式与射影变换的公式在形式上类似，因此由上述结论知，对于任给的一条二次曲线 $\bar{S}$，我们总可以作一个适当的射影变换，使得 $\bar{S}$ 变成一条新的二次曲线 $\bar{S}'$，而 $\bar{S}'$ 在原来基底中的方程为下述之一：

$$\begin{gathered} x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,\quad x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \\ x_1^2+x_2^2=0,\quad x_1^2-x_2^2=0,\quad x_1^2=0. \end{gathered} \tag{7.47}$$

前两条二次曲线是非退化的，后三条是退化的。不难看出，这五条二次曲线彼此不射影等价（所谓两条曲线是射影等价的，意思是存在一个射影变换把其中一条变成另一条）。这样我们就得到

**定理7.8** 射影平面上所有二次曲线分成五个射影类，它们的代表是(7.47)中五个方程所分别表示的曲线。前两类里都是非退化的二次曲线，后三类里都是退化的二次曲线。

容易看出，第一类都是没有轨迹的二次曲线；第二类里的二次曲线是原欧氏平面上的椭圆、双曲线和抛物线并且补充了它们的渐近方向（如果有的话）所对应的无穷远点；第三类里的二次曲线都是一个点；第四类里都是一对相交直线；第五类里都是一对重合直线。

射影平面上的椭圆，双曲线和抛物线在同一个射影类里，这是不奇怪的。譬如，在中心投影下，椭圆、抛物线和双曲线可以互变，如图7.21：椭圆是平面 $\pi_0$ 与圆锥面的交线，抛物线是 $\pi_1$ 与圆锥面的交线，于是以圆锥顶点为中心的从 $\pi_0$ 到 $\pi_1$ 的中心投影把椭圆变成抛物线。其余类似。

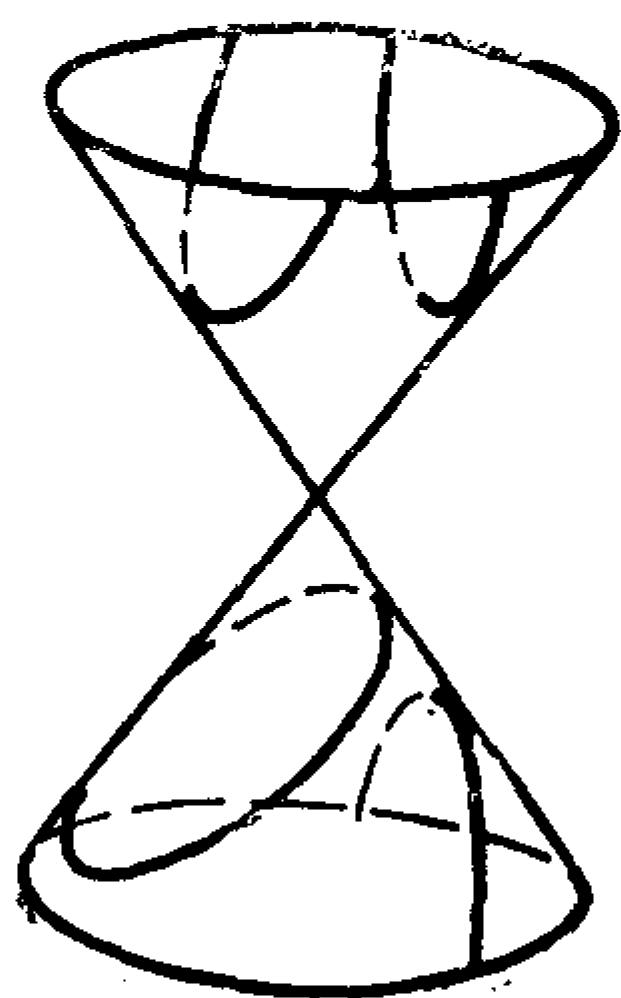


图 7.21

## *6.6 斯坦纳定理，巴斯卡定理，布里昂香定理

本小节讨论非退化二次曲线的三个定理。本小节所指的非退化二次曲线都把无轨迹除外。

**斯坦纳(Steiner)定理** 如果一条非退化二次曲线 $\bar{S}$上给定四个不同的点$A_1,A_2,A_3,A_4$，则 $\bar{S}$ 上任意一点$P$与它们的连线的交比$(PA_1,PA_2;PA_3,PA_4)$是一个常数(与点$P$在 $\bar{S}$上的位置无关)。如果$P$点与给定的四个点中某一个点(譬如$A_4$)重合，则$A_4A_1$，$A_4A_2$，$A_4A_3$与点$A_4$处的切线$A_4T$的交比$(A_4A_1,A_4A_2;A_4A_3,A_4T)$仍等于上述常数。

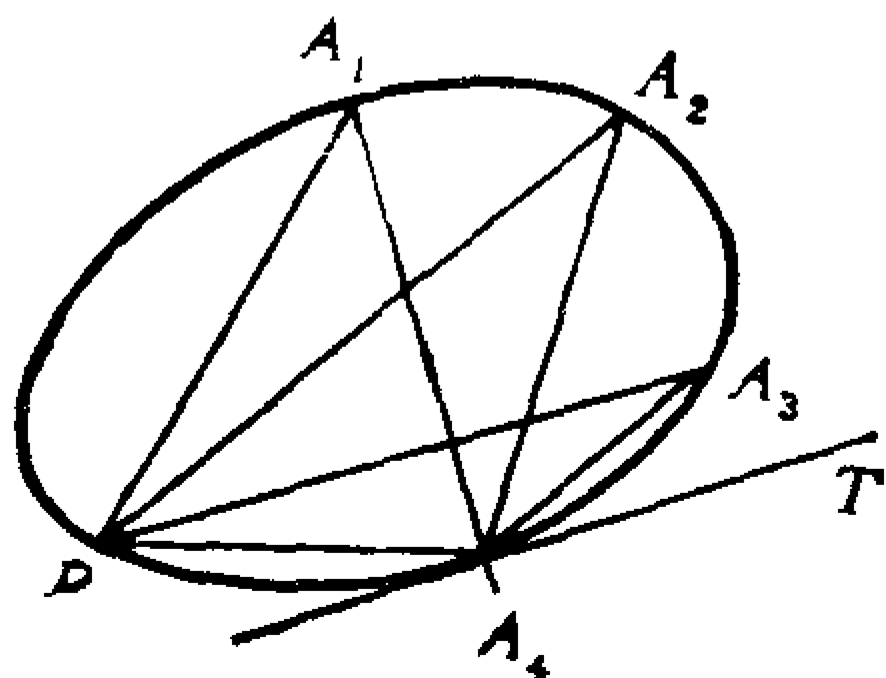


图 7.22

**证明** 易看出$A_1,A_2,A_3,A_4$是一般位置的四个点，因此可取基底为$[A_1,A_2,A_3,A_4]$，于是$\bar{S}$的方程为：

$$a_{12}x_1x_2+a_{23}x_2x_3+a_{13}x_1x_3=0\ , \tag{7.48}$$

其中，$a_{12}a_{23}a_{13}\neq 0$，并且$a_{12}+a_{23}+a_{13}=0$。不失一般性，可设

$$a_{23}=1,\quad a_{13}=-k,\quad a_{12}=k-1,\quad k\neq 0,1.$$

于是(7.48)成为

$$x_2x_3-kx_1x_3+(k-1)x_1x_2=0. \tag{7.49}$$

设$P$点坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，则它们满足方程(7.49)。直线$PA_1$，$PA_2,PA_3,PA_4$的方程分别为：

$$x_3X_2-x_2X_3=0,\quad x_3X_1-x_1X_3=0,\quad -x_2X_1+x_1X_2=0,$$
$$(x_2-x_3)X_1-(x_1-x_3)X_2+(x_1-x_2)X_3=0.$$

从而$PA_1,PA_2,PA_3,PA_4$的射影坐标分别为：

$$(0,x_3,-x_2),(x_3,0,-x_1),$$
$$x_1(0,x_3,-x_2)-x_2(x_3,0,-x_1),$$
$$(x_3-x_1)(0,x_3,-x_2)+(x_2-x_3)(x_3,0,-x_1),$$

因此

$$(PA_1,PA_2;PA_3,PA_4)=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}\bigg/\frac{x_1}{-x_2}=\frac{x_2(x_1-x_3)}{x_1(x_2-x_3)}. \qquad (7.50)$$

由（7.49）可得

$$k=\frac{x_2(x_1-x_3)}{x_1(x_2-x_3)}.$$

因此 $(PA_1,PA_2;PA_3,PA_4)=k.$

当点$P$趋近于$A_4$时，$(PA_1,PA_2;PA_3,PA_4)$总是等于$k$，而割线$PA_4$趋近于切线$A_4T$，于是经过取极限就得到

$$(A_4A_1,A_4A_2;A_4A_3,A_4T)=k.$$

利用斯坦纳定理可以证明下述的巴斯卡定理。

**巴斯卡(Pascal)定理** 一条非退化二次曲线的内接六角形的三对对边的交点一定共线。即如果$A,B,C,A',B',C'$在一条非退化二次曲线$S$上，设$AB'$与$A'B$交于$P$，$AC'$与$A'C$交于$Q$，$BC'$与$B'C$交于$R$，则$P,Q,R$共线。

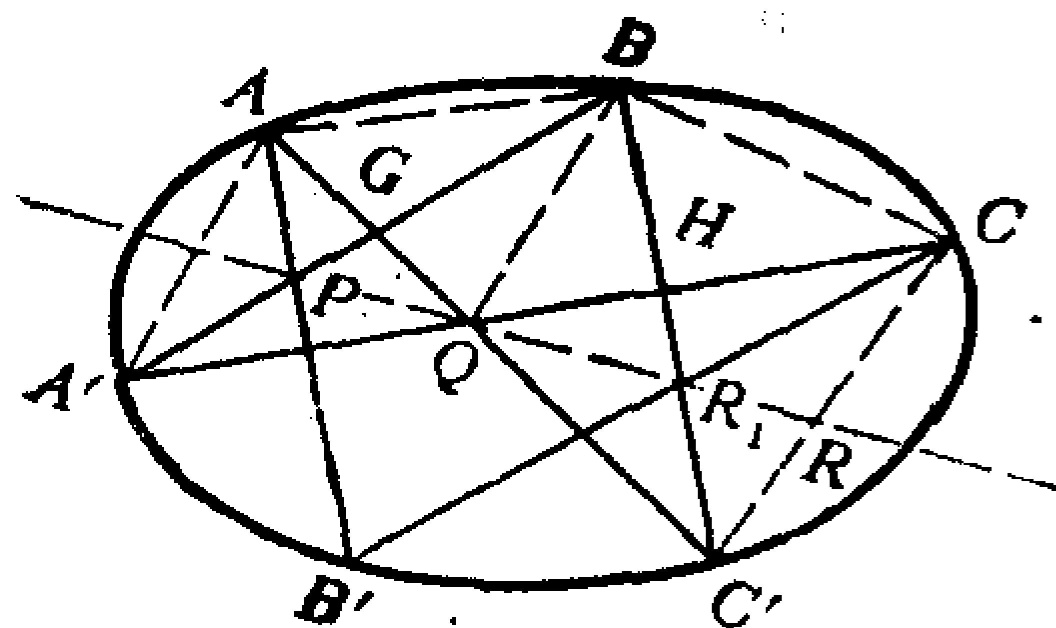



图 7.23

**证明** 设$BC'$与直线$PQ$交于$R_1$，若能证得$R_1=R$，则$R$在$PQ$上。

设$BC'$与$A'C$交于$H$，设$AC'$与$A'B$交于$G$。从束$Q$与割线$BC'$来看，有

$$(QB,QH;QC',QR_1)=(B,H;C',R_1).$$

从束$Q$与割线$BA'$来看，有

$$(QB,QH;QC',QR_1)=(QB,QA';QG,QP)=(B,A';G,P).$$

由上两式得

$$(B,H;C',R_1)=(B,A';G,P). \qquad (7.51)$$

再从束$A$与割线$BA'$来看，有

$$(B,A';G,P)=(AB,AA';AG,AP)。\qquad (7.52)$$

对于束$A$和束$C$，用斯坦纳定理，得

$$(AB,AA';AG,AP)=(CB,CA';CC',CB')。\quad (7.53)$$

再从束$C$和割线$BC'$来看，有

$$(CB,CA';CC',CB')=(B,H;C',R)。\qquad (7.54)$$

由(7.49)—(7.54)得

$$(B,H;C',R_1)=(B,H;C',R)。$$

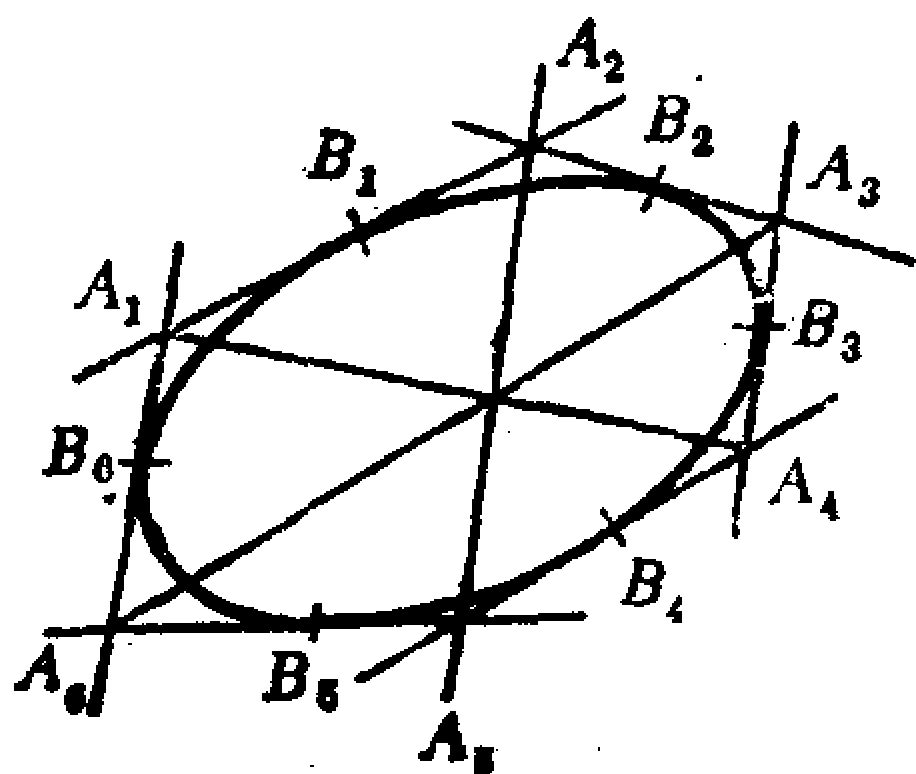



图 7.24

从而$R_1=R$，即$R$在直线$PQ$上。

巴斯卡定理的对偶命题是下述布里昂香定理。

**布里昂香 (Brianchon) 定理** 连接非退化二次曲线的外切六边形的对顶点所成的三条直线相交于一点。

## 习 题 7.6

1. 在射影平面上给了五个点，求由它们所确定的二次曲线。

$$A(1,-1,0),B(2,0,-1),C(0,2,-1),$$
$$D(1,4,-2),E(2,3,-2)。$$

2. 求通过点$A(1,0,1)$，$B(0,1,1)$，$C(0,-1,1)$，并且以直线$l_1$：$x_1-x_3=0$和直线$l_2$：$x_3-x_2=0$为切线的二次曲线。

3. 求点$P(1,2,1)$关于二次曲线$S$：

$$x_1^2-x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3=0$$

的极线。

4. 证明：不在二次曲线$S$上的每个无穷远点的极线是共轭于此无穷远点所对应的方向的直径。

5. 证明：非退化二次曲线$S$的中心(若有的话)的极线是无穷远直线。

6. 证明：双曲线上的无穷远点的极线是它的渐近线，从而双曲线上无穷远点处的切线是渐近线。

7. 证明：抛物线上的无穷远点的极线是无穷远直线，从而无穷远直线是抛物线的切线。

8. 证明：圆锥曲线(即椭圆，双曲线和抛物线，以下同)焦点的极线是准线。

9. 从圆锥曲线外一点 $P$ 作圆锥曲线的切线的方法为：从 $P$ 作任意两条直线 $L_1, L_2$，使得 $L_i$ 与圆锥曲线交于 $G_i, H_i$，连 $H_2G_1$，$H_2H_1$；连 $G_1G_2$，它与 $H_2H_1$ 交于 $A$；连 $H_1G_2$，它与 $H_2G_1$ 交于 $B$；连 $AB$，它与 $L_1, L_2$ 分别交于 $Q_1, Q_2$，它与圆锥曲线交于 $C_1$，$C_2$。连 $PC_1, PC_2$，它们就是从 $P$ 所引的圆锥曲线的两条切线。说出这种作法的理由。

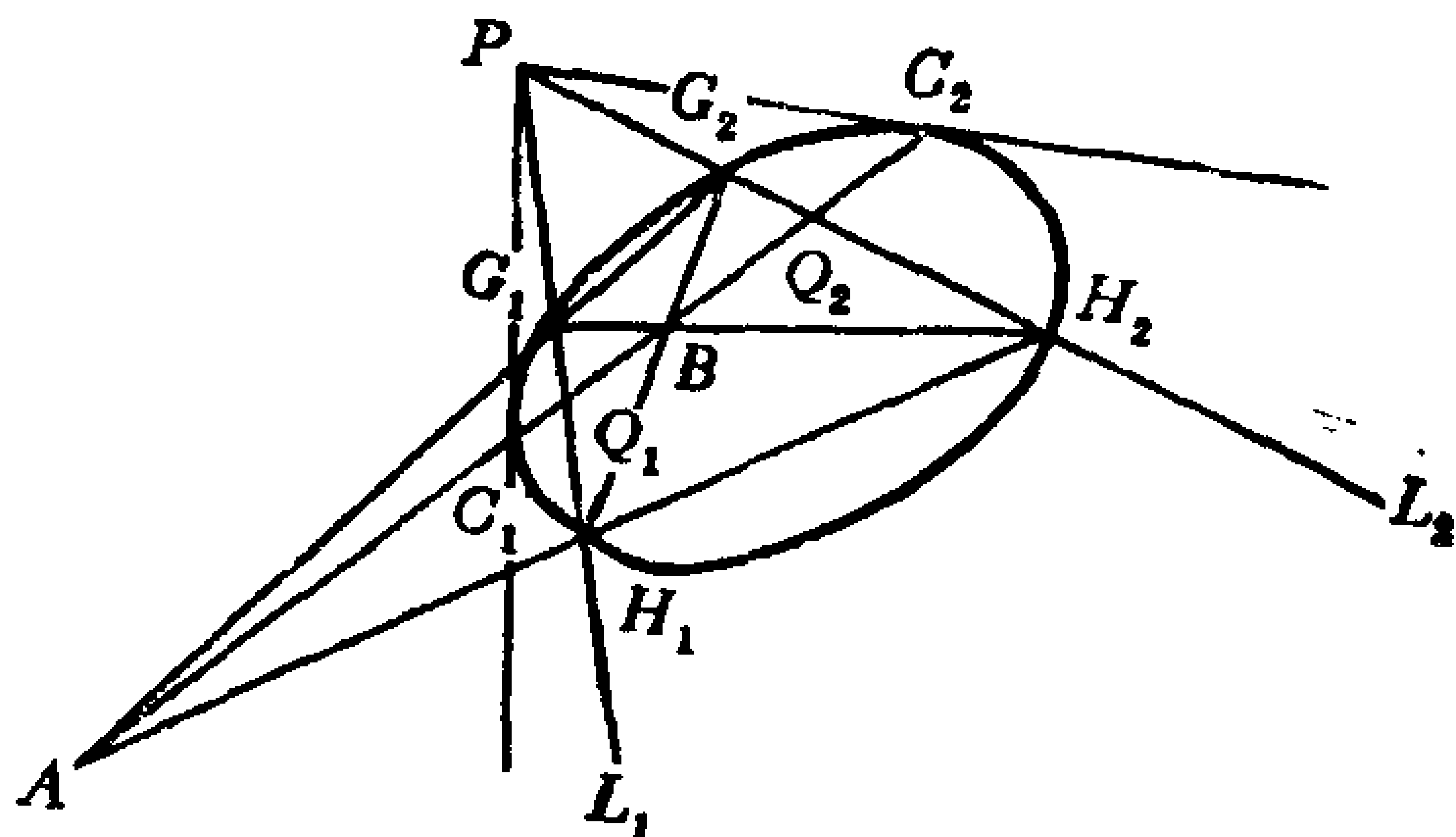



图 7.25

*10. 怎样用直尺作过圆锥曲线上给定点的切线？

*11. 对于非退化二次曲线 $S$，给了一个配极映射 $\tau$，它把点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 对应于点 $P$ 的极线 $L_P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，设 $\tau$ 的公式为

$$\rho\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

(1) 求直线 $L$：$x_1+x_2+x_3=0$ 的极点；

(2) 求自共轭点的轨迹（一个点 $P$ 的极线若通过 $P$，则称 $P$ 是关于 $S$ 的**自共轭点**。易知，非退化二次曲线 $S$ 的自共轭点的轨

迹就是二次曲线 $S$ 本身)。

*12. 如果一个完备四点形内接于一条二次曲线 $S$，那末它的三对对边的交点形成一个自配极三角形。

*13. 证明：射影平面上任给一般位置的五个点（即其中任意三点不共线），有且只有一条二次曲线通过它们。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝北京大学教材　　解析几何
作者＝丘维声
页数＝３００
ＳＳ号＝１０１００９６４
出版日期＝１９８８年０８月第１版

前言
目录